Zagadnienie Catalana

Dr Andrzej ROTKIEWICZ

W październikowym numerze «Delty» z ub. roku opowiedzieliśmy o „Wielkim twierdzeniu Fermata", tzn. problemie rozwiązalności równania $x^n+y^n = z^n$ (gdzie x, y, z i n są liczbami naturalnymi). Tu zajmiemy się innym słynnym zagadnieniem dotyczącym potęg, które do tej pory nie jest jeszcze w pełni rozwiązane, a które znane jest w teorii liczb pod nazwą „Przypuszczenie Catalana". Dotyczy ono tzw. potęg właściwych. Przez potęgę właściwą będziemy rozumieli potęgę a^x, gdzie a i x są liczbami naturalnymi większymi od jedności. Są to więc potęgi: 2^3, 3^2, 5^2, ... „Przypuszczenie Catalana" słowami można wyrazić tak:

Nie istnieją dwie kolejne liczby naturalne n i $n+1$ takie, że każda z tych liczb jest potęgą właściwą i $n \neq 8$. Catalan sformułował to przypuszczenie w r. 1844.

Używając symboliki matematycznej „Przypuszczenie Catalana" możemy wypowiedzieć tak:

Jedynym rozwiązaniem równania

$$a^x-b^y = 1,$$

gdzie a, b, x i y są liczbami naturalnymi większymi od 1,

jest: $a = 3$, $x = 2$, $b = 2$, $y = 3$.

Chociaż Catalan był prawdopodobnie pierwszym matematykiem, który sformułował tę hipotezę w powyżej podanej postaci, to szczególne jej przypadki znane były wcześniej. Już w średniowieczu Levi ben Gerson (1288–1344, zwany także Leo Hebraeus) udowodnił, że jedynym rozwiązaniem równania $3^x-2^y = \pm 1$, gdzie $x > 1$, $y > 1$, jest $x = 2$, $y = 3$. Przeprowadzimy tu najpierw dowód dla równania

$$3^x-2^y = 1. \tag{1}$$

Jeżeli $x = 2k+1$, to wobec faktu, że $4|3^2-1|3^{2k}-1$ jest $4|3^{2k+1}-3 = 3^x-3$, a ponieważ $2^y = 3^x-1 = (3^x-3)+2$, zatem $4|2^y-2$, stąd $y = 1$ i wobec (1) również $x = 1$.

Jeżeli zaś $x = 2k$, to $2^y = 3^x-1 = 3^{2k}-1 = (3^k-1)(3^k+1)$, skąd wynika, że $3^k+1|2^y$ i

$$3^k+1 = 2^l. \tag{2}$$

Niech $k = 2m$. Oczywiście $l > 1$. Mamy $8|3^2-1$, skąd

$8|3^{2m}-1 = (3^{2m}+1)-2 = 2^l-2$, co dla $l > 1$ jest niemożliwe.

Równanie (2) nie ma więc rozwiązań dla k parzystego. Jeżeli zaś k jest nieparzyste, to $k = 2m-1$, gdzie $m \geqslant 1$ i $3^k+1 = 3^{2m-1}+1 = 3(3^{2(m-1)}-1)+4$, a ponieważ $8|3^{2(m-1)}-1$, więc $8 \nmid 3^k+1$. Zatem $l = 2$, $k = 1$ i $x = 2$, $y = 3$.

Rozpatrzmy z kolei równanie $3^x-2^y = -1$. Wtedy $3^x+1 = 2^y$ i wobec przed chwilą przeprowadzonych rozważań mamy $x = 1$, $y = 2$.

W r. 1657 Frénicle de Bassy udowodnił, że równanie $a^2-b^y = 1$, gdzie b oznacza dowolną liczbę pierwszą i $(a, b) \neq (3, 2)$, nie ma rozwiązań naturalnych takich, że $y > 1$.

W r. 1738 Euler udowodnił, że jedynym rozwiązaniem równania $a^2-b^3 = 1$ w liczbach naturalnych a i b jest $a = 3$, $b = 2$.

W r. 1850 matematyk francuski Lebesgue udowodnił, że równanie $x^2+1 = y^n$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych $x > 1$, $y > 1$, gdy $n \geqslant 2$.

W 1921 r. matematyk norweski Nagell pokazał, że nie istnieją rozwiązania równań: $a^3-b^y = 1$, $a^x-b^3 = 1$, gdzie $x > 2$.

Problem pokazania, że nie istnieją rozwiązania równania $a^4-b^y = 1$, został postawiony w r. 1919 przez Nagella i rozwiązany w 1932 przez Selberga.

Tematem wielu prac było równanie $a^2-b^y = 1$. Nagell w 1921 i 1934 r. pokazał, że jeżeli $a^2-b^y = 1$, $(a, b, y) \neq (3, 2, 3)$ i p jest dzielnikiem pierwszym liczby y, to $8|p-1$.

Później (1940) matematyk węgierski Obláth udowodnił, że jeżeli $a^2-b^y = 1$, $(a, b, y) \neq (3, 2, 3)$, to $p^2|2^{p-1}-1$ i $p^2|3^{p-1}-1$ dla każdego p będącego dzielnikiem pierwszym liczby y.

W latach 1961 i 1964 Hyyrö i Inkeri udowodnili, że jeżeli $a^2-b^y = 1$, $(a, b, y) \neq (3, 2, 3)$, to a i b są bardzo duże, i podali oszacowanie dla liczb a i b.

Symbol $x|y$ oznacza: y jest podzielny przez x, symbol zaś $x \nmid y$ – zaprzeczenie tego faktu.

Rozwiązanie zadania M59.

Niech w określonym momencie zawodnik z_i ma rozegrane p_i partii ($i = 1, 2, \ldots, n$). Przypuśćmy, że liczby p_i są wszystkie różne. Ponieważ żadna z nich nie jest ujemna i każda jest nie większa od $n-1$, więc któraś z nich jest równa 0, inna zaś równa $n-1$. Istnieje więc zawodnik, który rozegrał partie ze wszystkimi pozostałymi zawodnikami, i istnieje zawodnik, który nie grał jeszcze z żadnym zawodnikiem — a więc sprzeczność. Przypuszczenie nasze było zatem fałszywe.

Uwaga: Zauważmy, że zadanie to różni się tylko sformułowaniem od następującego zadania, danego na XVI Olimpiadzie Matematycznej:

W sali znajduje się k osób ($k \geqslant 2$). Udowodnić, że co najmniej dwie z tych osób mają wśród obecnych tę samą liczbę znajomych, (przyjmujemy, że jeżeli osoba A zna osobę B, to również B zna A). (Możemy uważać, że znajomi to zawodnicy, którzy grali już ze sobą). Przytoczone zadanie może służyć do rozwiązania następującego zadania danego na XX Olimpiadzie Matematycznej:

Dowieść, że każdy wielościan ma co najmniej dwie ściany o tej samej liczbie boków. (Uważamy dwie ściany za „znajome", jeżeli mają wspólną krawędź).

Odpowiedź na pytanie w zadaniu 1 w artykule „Wstęp do teorii «zajączka świetlnego»":

$$v = \frac{A}{\cos^2\varphi + A\sin\varphi}\, c,$$

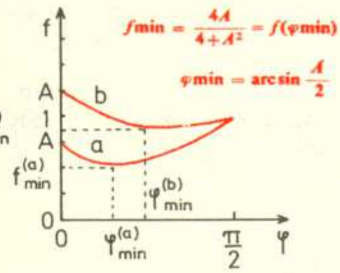
gdzie $A = (L+l)\omega/c$ i gdzie wykorzystano następujące wzory przybliżone:

$dt\cos\varphi\cos(\varphi+d\varphi) \cong dt\cos^2\varphi$;

$\sin d\varphi \cong d\varphi$;

$$2\sin\frac{d\varphi}{2}\sin\frac{2\varphi+d\varphi}{2} \cong \sin\varphi\cdot d\varphi.$$

Wykres funkcji $f(\varphi) = v(\varphi)/c$ w przypadkach $A < 1$ (a) i $A > 1$ (b) przedstawia poniższy rysunek.



Badania te zostały uwieńczone w końcu elementarnym i niezwykle pomysłowym dowodem matematyka chińskiego Chao Ko, który w 1964 r. udowodnił, że równanie $a^2-b^y = 1$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych $a > 1$, $b > 1$, $y > 1$, gdzie $(a, b, y) \neq (3, 2, 3)$.

Dążono również do tego, aby pokazać, że równanie $a^x-b^y = 1$ nie ma rozwiązań dla pewnych typów liczb a i b.

Pierwszym wynikiem tego rodzaju był wynik Gerona (z 1870 r.), który udowodnił, że nie istnieją rozwiązania równania $a^x-b^y = 1$, gdzie $(a, b, y) \neq (3, 2, 3)$, gdy a lub b jest liczbą pierwszą.

W r. 1941 Obláth pokazał, że jeżeli $(a, b, x, y) \neq (3, 2, 2, 3)$, to nie istnieją rozwiązania równania $a^x-b^y = 1$, gdy wszystkie dzielniki pierwsze liczb a i b są jednej z postaci: $p = 2^\alpha+1$ lub $p = 2^\alpha 3^\beta+1$.

W r. 1956 Hampel pokazał, że nie istnieją rozwiązania równania $a^x-b^y = 1$ (z wyjątkiem $3^2-2^3 = 1$), gdy $|a-b| = 1$. Inne dowody wyniku Hampela podali w 1956 r. Schinzel i Rotkiewicz.

W r. 1952 LeVeque dowiódł, że dla danych a i b równanie $a^x-b^y = 1$ ma co najwyżej jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych $x \geqslant 1$ i $y \geqslant 1$.

W 1961 r. Rotkiewicz dowiódł, że jeżeli $a^x-b^y = 1$, gdzie $x > 1$, $y > 1$, to $a > 1000$ i $b > 1000$.

W 1959 r. matematyk angielski Cassels udowodnił, że jeżeli $a^p-b^q = 1$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi $p > q \geqslant 2$, $a > 1$, $b > 1$, to

$$p|b, \quad q|a.$$

Łatwo zauważyć, że cztery kolejne liczby naturalne nie mogą być potęgami właściwymi. Rzeczywiście z czterech kolejnych liczb naturalnych jedna oczywiście daje resztę 2 przy dzieleniu przez 4, a więc nie może być potęgą właściwą.

W r. 1962 A. Mąkowski z twierdzenia Casselsa wywnioskował, że nie istnieją trzy kolejne liczby naturalne, które są potęgami właściwymi.

Rzeczywiście, nie uszczuplając ogólności możemy przyjąć, że wykładniki wymienionych potęg właściwych są liczbami pierwszymi. Niech teraz z^r, y^q i x^p będą kolejnymi potęgami właściwymi:

$$x^p-y^q = 1 \quad \text{oraz} \quad y^q-z^r = 1. \tag{3}$$

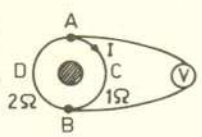
Na mocy twierdzenia Casselsa mamy $q|x$ i $q|z$, skąd wobec (3) mamy $q|x^p- z^r = 2$ i $q = 2$, a ponieważ $p > 1$, $r > 1$, więc $4|x^p-z^r = 2$, co jest oczywiście niemożliwe.

Nasze rozważania kończymy podaniem wyniku matematyka holenderskiego Tijdemana. Otóż w 1974 r. udowodnił on, że równanie $a^x-b^y = 1$ ma w liczbach naturalnych a, b, x, y większych od 1 skończoną liczbę rozwiązań.

Istnieje więc liczba naturalna M taka, że o ile $a^x-b^y = 1$, to $a < M$, $b < M$, $x < M$, $y < M$.

Rozwiązanie zadania F20.

Rozwiązanie niniejszego zadania należy porównać z rozwiązaniem zadania F19, zamieszczonym w poprzednim (7) numerze «Delty». Zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej, w obwodzie kołowym będzie indukowała się siła elektromotoryczna ε równa 3 V. Ponieważ całkowity opór obwodu wynosi 3 Ω, w obwodzie będzie płynął prąd o natężeniu I równym 1 A. Gdyby siła elektromotoryczna w obwodzie była przyłożona przez włączenie baterii (jak w zadaniu F19), wówczas napięcie między punktami A i B moglibyśmy wyznaczyć korzystając z prawa Ohma. W tym zadaniu jednak miejsce przyłożenia indukowanej siły elektromotorycznej nie jest określone. Czy można więc jednoznacznie określić napięcia między punktami A i B? Okazuje się, że nie. Rozważmy pomiar napięcia przy pomocy woltomierza podłączonego do punktów A i B według schematów pokazanych na rysunkach 1 a i 1 b.



Rys. 1a

Napiszmy prawo Kirchhoffa dla zamkniętych obwodów ACBV i ADBV dla obu schematów podłączeń woltomierza Wskazania woltomierza oznaczamy literą U oraz zakładamy, że punkt A łączymy z zaciskiem + woltomierza, a kierunek indukowanego prądu jest taki, jak zaznaczono na rysunkach.

Otrzymamy:

dla schematu 1 a: $U = I\cdot R_{ACB} = 1\text{ V}$ (obwód $ACBV$),
$U = \varepsilon-I\cdot R_{ADB} = 1\text{ V}$ (obwód $ADBV$).

Należy zauważyć, że w obwodzie $ADBV$ przy tym schemacie połączeń występuje siła elektromotoryczna indukcji ε.

dla schematu 1 b: $U = I\cdot R_{ACB}-\varepsilon = -2\text{ V}$ (obwód $ACBV$),
$U = -I\cdot R_{ADB} = -2\text{ V}$ (obwód $ADBV$).

Rys. 1b

Teraz siła elektromotoryczna indukcji występuje w obwodzie $ACBV$.

W zależności od sposobu przyłączenia woltomierza uzyskaliśmy różne wyniki. Czyli w przypadku występowania siły elektromotorycznej indukowanej (ogólniej: gdy istnieją pola magnetyczne zmienne w czasie) nie istnieje jednoznacznie określony elektryczny potencjał skalarny. Gdybyśmy druty łączące woltomierz z punktami A i B obwinęli wielokrotnie wokół walca, woltomierz wskazałby jeszcze inne wartości napięcia. Ogólna odpowiedź jest następująca:

$$U = -(2+3n)\text{ V}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

zależnie od tego, jak doprowadzone są druty od punktów A i B do zacisków woltomierza.

Porównując zadania F19 i F20 możemy sobie uświadomić różnicę między siłami elektromotorycznymi: przyłożoną i indukowaną.