O przestrzeniach metrycznych (III)

Doc. dr Maria MOSZYŃSKA

Jak przekonaliśmy się w pierwszych dwóch częściach tego artykułu, posługując się metryką można w naturalny sposób zdefiniować różne pojęcia geometryczne. Niektóre z nich są pojęciami znanymi i używanymi „na co dzień",
— tj. w przypadku przestrzeni lub płaszczyzny euklidesowej (ze zwykłą metryką), ale rozszerzonymi na dowolne przestrzenie metryczne.

Wprowadzone pojęcia pomagają badać własności przestrzeni metrycznych oraz porównywać różne przestrzenie. Zapyta ktoś, o jakie własności chodzi i pod jakim względem chcemy te przestrzenie porównywać. Słusznie. Na to właśnie pytanie postaramy się teraz odpowiedzieć. Pomoże nam w tym jedno z podstawowych pojęć współczesnej matematyki; pojęcie *funkcji.*

Weźmy pod uwagę dwie przestrzenie metryczne (X, ϱ) i (X', ϱ'). Może się zdarzyć, że istnieje taka funkcja f zbioru X na zbiór X', która zachowuje odległość dowolnych par punktów, tj. funkcja $f: X \xrightarrow{\text{na}} X'$ spełniająca warunek

(1) $\varrho'(f(p), f(q)) = \varrho(p, q)$ dla dowolnych punktów p i q ze zbioru X.

Taka funkcja f nazywa się *izometrią.*

„Na" znaczy, że każdy punkt p' ze zbioru X' odpowiada *jakiemuś* punktowi p ze zbioru X, tj.

(2) dla każdego p' należącego do X' istnieje punkt p należący do X, taki że $f(p) = p'$.

Z warunku (1) wynika, że każdy punkt p' ze zbioru X' może odpowiadać *tylko jednemu* punktowi p, tzn.

(3) jeśli $f(p) = f(q)$, to $p = q$.

Pamiętamy, że $\varrho(p, q) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $p = q$.

Funkcja spełniająca warunki (2) i (3) nazywa się *wzajemnie jednoznaczną* (albo: *różnowartościową*). A więc każda izometria jest funkcją wzajemnie jednoznaczną.

O takich dwóch przestrzeniach, dla których istnieje izometria jednej z nich na drugą, mówi się że są *izometryczne.*

Jeśli na przykład X i X' są dwoma okręgami o tym samym promieniu, a zarówno ϱ jak ϱ' jest metryką łukową (patrz I część artykułu), to przestrzenie (X, ϱ) i (X', ϱ') są izometryczne. Jeżeli natomiast (X, ϱ) jest okręgiem z metryką łukową, a (X', ϱ') okręgiem ze zwykłą metryką, to (X, ϱ) i (X', ϱ') nie są izometryczne. Żeby się o tym przekonać, zauważmy, że dla dowolnej izometrii f prawdziwa jest następująca implikacja:

x leży między a i b w przestrzeni (X, ϱ), jeśli $\varrho(a, x) + \varrho(x, b) = \varrho(a, b)$.

(4) jeżeli punkt x leży między a i b, to $f(x)$ leży między $f(a)$ i $f(b)$.

Gdyby więc istniała izometria f okręgu X z metryką łukową ϱ na okręg X' z metryką zwykłą ϱ, to izometria ta przeprowadzałaby punkty zbioru X leżące między a i b na punkty zbioru X' leżące między $f(a)$ i $f(b)$. Tymczasem w zbiorze X' jedynymi punktami, które leżą między $f(a)$ i $f(b)$ (w sensie metryki ϱ), są same punkty $f(a)$ i $f(b)$. A więc cały łuk o końcach a, b musiałby przejść na zbiór co najwyżej 2-punktowy — wbrew wzajemnej jednoznaczności funkcji f.

Łatwo sprawdzić, że z innymi pojęciami wprowadzonymi poprzednio rzecz ma się podobnie, jak z relacją leżenia między. Mianowicie dla dowolnej izometrii f przestrzeni (X, ϱ) na (X', ϱ'):

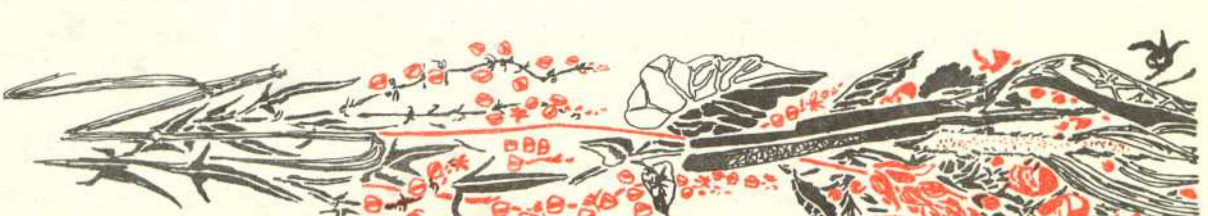
(5) jeżeli x jest środkiem pary a, b, to $f(x)$ jest środkiem pary $f(a)$, $f(b)$;

(6) kula $K_{(X, \varrho)}(a, \lambda)$ przechodzi na kulę $K_{(X', \varrho')}(f(a), \lambda)$;

(7) zbiór $\mathrm{Int}_{(X, \varrho)} A$ przechodzi na zbiór $\mathrm{Int}_{(X', \varrho')} f(A)$ (przy czym $f(A)$ jest obrazem zbioru A, czyli zbiorem punktów postaci $f(p)$, dla wszystkich p należących do A).

Ostatni warunek można zapisać w postaci:

(7') $f(\mathrm{Int} A) = \mathrm{Int} f(A)$.



Rozwiązanie zadania M58.

Niech O będzie punktem przecięcia przekątnych danego czworokąta $ABCD$ i niech S_1, S_2, S_3, S_4 będą odpowiednio polami trójkątów AOB, BOC, COD i DOA. Mamy więc

$$S_1+S_2 = S_3+S_4,$$
$$S_1+S_4 = S_2+S_3.$$

Dodając i odejmując stronami te równości otrzymujemy

$$2S_1+S_2+S_4 = 2S_3+S_2+S_4,$$
$$S_2-S_4 = S_4-S_2$$

skąd $S_1 = S_3$, $S_2 = S_4$.

Ponieważ $S_1 = \frac{1}{2} AO \cdot BO \sin\alpha$,

$S_3 = \frac{1}{2} CO \cdot DO \sin\alpha$, gdzie α jest kątem między przekątnymi, więc

$$AO \cdot BO = CO \cdot DO.$$

Podobnie otrzymujemy równość

$$BO \cdot CO = AO \cdot DO.$$

Mnożąc i dzieląc stronami ostatnie dwie równości otrzymujemy

$$BO^2 \cdot AO \cdot CO = DO^2 \cdot AO \cdot CO,$$

$$\frac{AO}{CO} = \frac{CO}{AO},$$

skąd $BO = DO$, $AO = CO$. Udowodniliśmy więc, że przekątne w omawianym czworokącie połowią się, a to oznacza, że jest on równoległobokiem.

$\mathrm{Cl}_A = X - \mathrm{Int}(X-A)$.

Jako wniosek z tego, że każda izometria spełnia warunek (5), otrzymujemy następujące twierdzenie:

(8) *Jeżeli przestrzeń (X, ϱ) jest wypukła (mocno wypukła), to każda przestrzeń z nią izometryczna jest też wypukła (mocno wypukła).*

O takiej własności, która wraz z daną przestrzenią przysługuje każdej z nią izometrycznej, mówi się, że jest *niezmiennikiem izometrii*. A więc wypukłość i mocna wypukłość są niezmiennikami izometrii.

Z twierdzenia (8) wynika, że płaszczyzna z metryką zwykłą i płaszczyzna z metryką miejską nie są izometryczne (por. I część artykułu). Podobnie jest dla płaszczyzny z metryką zwykłą i z metryką kolejową, ale dowód jest trudniejszy. Mamy więc pewien sposób porównywania przestrzeni metrycznych — z punktu widzenia tzw. *geometrii metrycznej*, czyli teorii, która zajmuje się niezmiennikami izometrii. Nie jest to bynajmniej jedyny możliwy punkt widzenia. Przedstawimy tu krótko jeszcze jeden.

Funkcję wzajemnie jednoznaczną $f: X \to X'$ nazywa się *homeomorfizmem* przestrzeni (X, ϱ) na (X', ϱ'), jeżeli spełnia warunek (7′).

Jasne jest, że każda izometria jest homeomorfizmem. Nie jest jednak na odwrót, a więc klasa homeomorfizmów jest istotnie szersza od klasy izometrii.

Dla dowodu rozważmy płaszczyznę z metryką zwykłą (E^2, ϱ) i płaszczyznę z metryką miejską $(E^2, \overline{\varrho})$. Funkcja $f: E^2 \to E^2$ określona wzorem

$$f(p) = p \quad \text{dla każdego punktu} \quad p,$$

przeprowadza dowolny podzbiór A płaszczyzny na ten sam zbiór, tzn.

$$f(A) = A \quad \text{dla każdego zbioru} \quad A.$$

Zatem funkcja f spełnia warunek (7′), a więc jest homeomorfizmem. Oczywiście f nie jest izometrią — pokazaliśmy przecież, że dla tych dwu przestrzeni izometria nie istnieje. Te dwie przestrzenie są więc homeomorficzne, ale nie są izometryczne.

Teoria, która zajmuje się niezmiennikami homeomorfizmów, nazywa się *topologią*. Dwie przestrzenie mogą się więc różnić pod względem metrycznym (z punktu widzenia geometrii metrycznej), chociaż nie różnią się pod względem topologicznym (z punktu widzenia topologii).

Na czym polega różnica pomiędzy takimi pojęciami, jak relacja leżenia między, zbiór środków, kula, a takimi, jak wnętrze, domknięcie, otwartość, domkniętość, gęstość, brzegowość? (por. II część artykułu). Odpowiedź pozostawiamy Czytelnikowi. Pomogą mu zadania 1 i 2.

Zadania

1. Wykazać, że implikacje (4), (5) i (6) nie są prawdziwe dla dowolnego homeomorfizmu.

2. Dowieść, że dla dowolnego homeomorfizmu f przestrzeni (X, ϱ) na (X', ϱ')

(a) $f(\mathrm{Cl} A) = \mathrm{Cl}\, f(A)$,

(b)		otwarty		otwarty	
(c)		domknięty		domknięty	
	zbiór A jest		w (X, ϱ) wtedy i tylko wtedy, gdy $f(A)$ jest		w (X', ϱ').
(d)		gęsty		gęsty	
(e)		brzegowy		brzegowy	

3. Dowieść, że warunek (b) z zadania 2 jest również dostateczny na to, by funkcja (wzajemnie jednoznaczna) f była homeomorfizmem.

4. W zbiorze X wprowadzono dwie różne metryki: ϱ i ϱ'. Dowieść, że na to, by funkcja $f: X \to X$ określona przez wzór $f(p) = p$ była homeomorfizmem przestrzeni (X, ϱ) na (X, ϱ'), potrzeba i wystarcza, by metryki ϱ i ϱ' były równoważne.

Wskazówka: skorzystać z zadania 3.

5. Zadanie 4 z II części artykułu («Delta», 1975, 5) jest błędnie sformułowane. Jak należy je poprawić? Jakie wystarczy przyjąć założenia, by domknięcie kuli było kulą domkniętą?