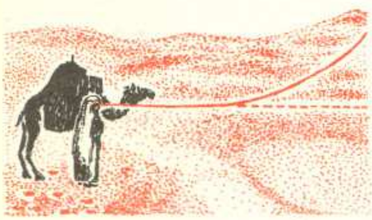
Jezioro na pustyni — sen czy jawa?

Słyszałeś z pewnością, jak przykre przygody spotykają wędrowców na pustyni. Kiedy spragnieni wypatrują wody i chłodu, ukazuje im się jezioro. Uradowani podążają w jego kierunku, ale, ku ich rozpaczy, okazuje się, że było to złudzenie. Skąd się ono bierze? Czy zmęczeni ludzie śnią na jawie? Czy można je naukowo wyjaśnić? Zjawisko to, zwane mirażem, jest bardziej pospolite, niż by się wydawało.

Czy pamiętasz, co mówiliśmy o torze promieni świetlnych w ośrodku, którego gęstość zmienia się od punktu do punktu? Tor ten jest zakrzywiony. Promienie słoneczne, na przykład, docierają do naszych oczu bardziej stromo, niż powinny, gdyby biegły po linii prostej. Dzieje się tak z tego powodu, że atmosfera ziemska jest tym gęstsza, im bliżej znajduje się Ziemi. Tak jest w ogólności, ale w pobliżu powierzchni Ziemi mogą dziać się dziwne rzeczy. W gorące, słoneczne dni powierzchnia Ziemi silnie się nagrzewa. Tuż nad Ziemią powstaje wtedy cienka warstwa rozgrzanego powietrza o znacznie mniejszej gęstości niż warstwy położone wyżej. Promienie światła, biegnące od dalekiego przedmiotu ukośnie do powierzchni Ziemi, przechodząc przez tę warstwę zmieniają w niej swój kierunek tak, że po wyjściu z niej oddalają się od Ziemi i mogą trafić do naszych oczu. Tak więc błękitne jezioro, które ukazuje się podróżnym na pustyni, jest po prostu obrazem nieba powstałym na tle gorącego piasku.

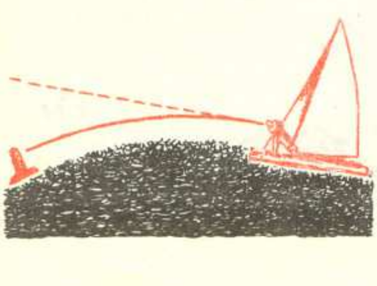


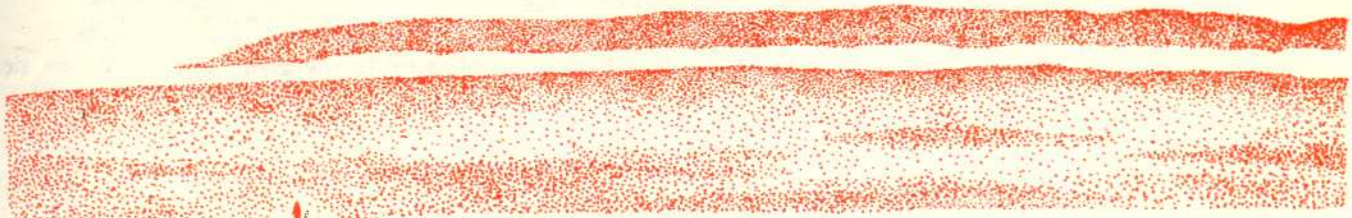
ZAGADKA

Dlaczego latem, przy upalnej pogodzie, widzimy na szosie daleko przed sobą błyszczące kałuże, które znikają, gdy się do nich zbliżamy?

RUCHOMY HORYZONT

Często się zdarza, że tuż nad Ziemią tworzy się warstwa powietrza chłodnego, ciężkiego, a nad nią warstwa powietrza cieplejszego, o mniejszej gęstości. Wtedy krajobraz, który normalnie jest niewidoczny, ponieważ leży poniżej linii horyzontu, staje się widoczny. Zjawisko pozornego „podniesienia się horyzontu" obserwujemy najczęściej przy brzegach mórz. Ciekawy opis tego zjawiska podał badacz z Obserwatorium Morskiego w Gdyni: „[...] czasami osada Hel jest w tak nienaturalny sposób rozszerzona i podniesiona, że widać poszczególne domy, chociaż odległość od Gdyni do Helu wynosi 18 km i w warunkach zwykłych osada nie jest widoczna. Obserwowany był również przypadek, gdy cały Gdańsk „wisiał w powietrzu wyraźnie oddzielony od lustra morza [...] Przy zmianach kierunku wiatru zjawisko szybko zanika". Gdy będziesz kiedyś nad morzem, obserwuj każdego pogodnego dnia krajobraz w pobliżu linii horyzontu. Na pewno uda ci się zobaczyć podobne zjawisko.





DLACZEGO GWIAZDY MIGOCZĄ?

Natomiast niezależnie od tego, gdzie się znajdujesz, warto żebyś wybrał się na obserwacje nocnego nieba. Spójrz na gwiazdy położone niezbyt wysoko nad horyzontem. Nie świecą one w sposób ciągły, lecz migoczą. Stale zmienia się ich blask i barwa. Przyczyną migotania gwiazd są szybkie pulsacje powietrza w dolnych warstwach atmosfery, spowodowane promieniowaniem ciepła przez powierzchnię Ziemi. Podobne drganie powietrza, tylko na mniejszą skalę, możesz zobaczyć nad ogniskiem, nad lokomotywą, kominem albo nawet nad ziemią w upalny, słoneczny dzień.

ZJAWISKO „HALO"

Kąt najmniejszego odchylenia D wiąże się z kątem łamiącym pryzmatu A i współczynnikiem załamania n następującym wzorem:

$$\sin\frac{A+D}{2} = n\sin\frac{A}{2}.$$

Gdy kąt łamiący pryzmatu A wynosi 60°, a współczynnik załamania $n = 1,31$, mamy

$$\sin\frac{60^\circ+D}{2} = 1,31\sin 30^\circ = 1,31\cdot\frac{1}{2} = 0,655.$$

Wartość sinusa 0,655 odpowiada kątowi 40,9°. Stąd $\frac{60^\circ+D}{2} = 40,9^\circ$, a więc $D = 21,8^\circ$.

Gwiazdy migoczą w każdą pogodną noc, za to trochę trudniej jest zaobserwować inne, bardzo ciekawe zjawisko na nocnym niebie. Jest nim wielki krąg świetlny wokół Księżyca, tzw. „halo". Nie należy go mylić z małym wieńcem okalającym Księżyc. Halo jest pierścieniem o promieniu, który widać pod kątem 22°. Jeśli nie wiesz, ile to jest, pomoże ci taka metoda: wyciągnij przed siebie rękę i rozłóż szeroko palce. Jeśli kciukiem zasłonisz Księżyc, czubkiem małego palca możesz zatoczyć okrąg o promieniu, który widzisz pod kątem około 20°.

Halo nie występuje przy każdej pogodzie. Nie zobaczysz go w bardzo pogodną noc, kiedy niebo jest całkowicie bezchmurne. Podobnie, nie ma co wyruszać na obserwacje przy pełnym zachmurzeniu. Idealne warunki — to lekko zasnute mgłą niebo. Warunki sprzyjające utworzeniu się halo wokół Księżyca zdarzają się średnio raz na cztery dni, czyli dosyć często.

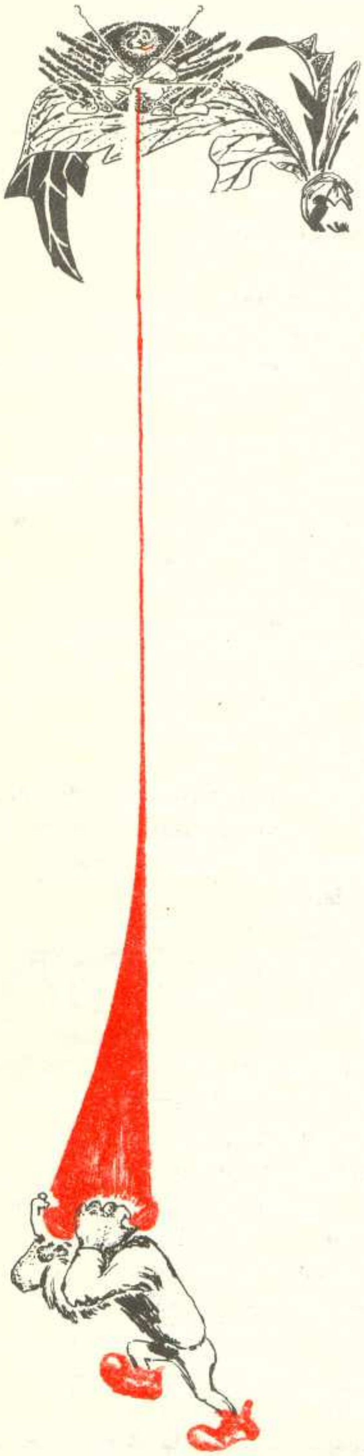
Nawet wiosną i latem, kiedy na Ziemi jest ciepło, wysoko w górze panuje mróz. W chmurze znajduje się bardzo wiele małych kryształków lodu, których przekrój ma kształt sześciokąta foremnego.

Te kryształki lodu działają jak pryzmat o kącie łamiącym 60°. Odchylają promień świetlny o pewien kąt, zależny od ich ustawienia względem tego promienia. Obliczono, że kąt ten jest nie mniejszy niż 22°. Dlatego tyle właśnie wynosi kąt odpowiadający wewnętrznej krawędzi pierścienia.

Mówiliśmy dotąd o halo księżycowym, ale podobny krąg możesz zaobserwować wokół Słońca. Musisz być ostrożny, żeby nie oślepiło cię światło biegnące bezpośrednio od Słońca. Najlepiej stanąć w cieniu albo dłonią zasłonić oczy. Ponieważ halo słoneczne i księżycowe powstaje w tych samych warunkach atmosferycznych, więc przy odrobinie szczęścia możesz zaobserwować oba na raz: jeden pierścień wokół zachodzącego Słońca i drugi — wokół wschodzącego Księżyca.

Radzę ci założyć dziennik obserwacji. Notowałbyś w nim datę, pogodę oraz fakt zaobserwowania halo słonecznego i księżycowego. Jeśli jesteś fotoamatorem, spróbuj halo sfotografować. Pamiętaj, że konieczny jest do tego żółty filtr. Podziel się z nami wynikami swoich badań.

Jak sobie radzić z ułamkami okresowymi



Marek wrócił z wakacji bardzo przejęty — odkrył sprzeczność w matematyce. Zaczęło się od kupowania biletów na pociąg. Na legitymacji szkolnej Marek przeczytał: „uprawnia do zniżki 33%". — Kto to wymyślił, 33%? — dziwił się. Mama wyjaśniła mu, że widocznie chodzi o $\frac{1}{3}$, lecz nie udało się jej przekonać syna. — Przecież $3 \cdot 33\%$ to 99%, a nie 100%. — Marek miał coraz więcej wątpliwości. Wreszcie dokonał odkrycia.

— Jeśli rozwinąć $\frac{1}{3}$ w ułamek dziesiętny — opowiadał z przejęciem — otrzymamy ułamek okresowy 0,333.... Pomnóżmy to przez 3: otrzymamy 0,999....

Ale $\frac{1}{3} \cdot 3$ musi być równe 1, a nie żadne 0,999... — kończył swoje opowiadanie. Wyraźna sprzeczność.

Oczywiście, Marek nie znalazł w matematyce sprzeczności i nie udało się to dotychczas nikomu. Tym niemniej odkrycie Marka jest bardzo ciekawe i warto o nim porozmawiać.

Wszystko wyjaśnia się bardzo prosto: 1 i 0,999... to tylko dwa różne sposoby zapisania tej samej liczby. Spróbuję was o tym przekonać.

Zgodzicie się chyba, że 0,999... nie jest większa od 1. Ale okazuje się, że nie jest też liczbą mniejszą niż 1. Dlaczego?

Sprawdźmy, czy różnica $1-0{,}999...$ jest większa od zera (tylko wówczas 1 jest większe od 0,999...).

Każda liczba większa od zera jest równocześnie większa od chociażby jednej z liczb:

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1\,000}, \frac{1}{10\,000}, \ldots$$

(trzy kropki zastępują zwrot „i tak dalej" wskazując, że wyliczyłem nieskończenie wiele liczb).

Na przykład liczba $\frac{16}{9\,275}$ jest większa od $\frac{1}{10\,000}$, liczba $\frac{2}{783\,002\,714}$ jest większa od $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$ a liczba 0,000562 jest większa od $\frac{1}{10\,000}$ (dlaczego?).

Tymczasem liczba $1 - 0{,}999...$ jest mniejsza od wszystkich liczb: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1\,000}$, $\frac{1}{10\,000}$, ... Sprawdźmy dla przykładu, że $1 - 0{,}999...$ jest mniejsze od $\frac{1}{1\,000}$:

Liczba $1 - 0{,}999...$ jest mniejsza od $\frac{1}{1\,000}$.

Sprawdzamy.

0,999... jest liczbą większą od 0,999 (dlaczego?).

Wobec tego $1 - 0{,}999...$ jest mniejsze od $1 - 0{,}999$

$$1 - 0{,}999 = \frac{1}{1\,000}.$$

Ostatecznie: $1 - 0{,}999...$ jest mniejsze od $\frac{1}{1\,000}$.

Co wynika z tych obliczeń?

Liczba, która nie jest ani ujemna, ani dodatnia, może być tylko zerem.

$$1 - 0{,}999... = 0.$$

Zapisując inaczej: **$1 = 0{,}999...$**

Ciekawy jestem, jak się wam to podoba?

Moim zdaniem nie trzeba się martwić, że liczba 1 ma dwa różne rozwinięcia dziesiętne: 0,999... i 1,000....

Uważam, że byłoby znacznie gorzej, gdyby nie można było zapisywać liczb różnymi sposobami.

Żeby was o tym przekonać, podam kilka przykładów:

Przykład 1.

Jeśli chcę liczbę $\frac{1}{5}$ dodać do $\frac{7}{15}$, najwygodniej przedstawić ją w postaci $\frac{3}{15}$.

Natomiast, gdy chcę ją dodać do 0,73, wygodniej będzie użyć zapisu 0,20.

Umiejętność zapisywania liczb w różny sposób przydaje się do działań na ułamkach okresowych.

Pamiętacie zapewne z lekcji szkolnych, że ułamek okresowy 0,333... umówiliśmy się zapisywać krótko: 0,(3). Nawias w tym zapisie oznacza, że trójka powtarza się nieskończenie wiele razy. Czy zwróciliście uwagę, że zamiast 0,(3) można napisać inaczej?

Na przykład: 0,3(3) albo 0,(33), albo 0,33(33333) itp.

Podobnie, 0,747474... można zapisać na wiele sposobów:

$$0,(74) \quad 0,7(47) \quad 0,(70)+0,(04) \quad 0,7(07)+0,(04).$$

A oto dalsze przykłady. Oceńcie sami, czy nie jest wielką wygodą zapisywanie liczby w różny sposób?

Przykład 2.

Jak dodać 0,(23) i 0,(405)?

0,(23) zapisujemy w postaci 0,(232323),

0,(405) zapisujemy w postaci 0,(405405).

Teraz już łatwo dodać te liczby:

$0,(23)+0,(405) = 0,(637728)$.

(Czy nie przypomina to wam sprowadzania do wspólnego mianownika?).

Przykład 3.

Jak pomnożyć 0,(83) przez 2?

0,(83) zapisujemy inaczej: $0,8+0,0(38)$ (sprawdźcie!).

$2 \cdot 0,(83) = 2 \cdot 0,8+2 \cdot 0,0(38) = 1,6+0,0(76) = 1,6(76) = 1,(67)$.

Przykład 4.

Jak pomnożyć 0,(84) przez 7?

0,(84) zapisujemy inaczej:

$0,8+0,0(08)+0,(04)$ (sprawdźcie!).

$$\begin{aligned} 7 \cdot 0,(84) &= 7 \cdot 0,8+7 \cdot 0,0(08)+7 \cdot 0,(04) = \\ &= 5,6+0,0(56)+0,(28) = \\ &= 5+0,6(56)+0,(28) = \\ &= 5+0,(65)+0,(28) = \\ &= 5,(93). \end{aligned}$$

Kto nie dowierza, niech sprawdzi:

$$0,(84) = \frac{28}{33} \qquad 7 \cdot \frac{28}{33} = \frac{196}{33} = 5,(93).$$

Na zakończenie proponuję kilka zadań:

1. Zastanówcie się, jak dodać 0,(79) do 0,0(48)?
2. Jak mnożyć ułamki okresowe przez 10, 100, 1 000, ...?
3. Spróbujcie obliczyć:
   $2,(71) \cdot 0,06$,
   $0,(42) \cdot 158$

Małą Deltę przygotowali: P. Nowicki i D. Ziemińska