O wielości światów

Dr Marek KORDOS

Niezależnie od tego, że można uprawiać różne geometrie naszej przestrzeni, sensowne jest pytanie, czy istnieją przestrzenie inne od tej „naszej". A jeśli istnieją, to czym się różnią?
Spróbujmy zatem wyobrazić sobie jakąś „inną" przestrzeń albo przynajmniej jej fragment. Niech będzie to przestrzeń dwuwymiarowa, czyli odpowiednik „naszej" płaszczyzny.

CZYM SIĘ RÓŻNI PROSTA

Od czego? Ano, od innych linii. Ważną własnością prostej jest to, że jest najkrótszą linią łączącą dowolnie wybrane swoje punkty. Linie o tej własności nazywają się „geodezyjnymi". Prosta jest więc geodezyjną płaszczyzny.
A jak wyglądają geodezyjne sfery (czyli powierzchni kuli)? Muszą to być linie leżące na sferze, więc nie proste. Ogląd, ewentualnie eksperyment polegający na napinaniu nitki między dwoma punktami globusa, wreszcie (dla teoretyków) geometria różniczkowa, pouczają nas, że geodezyjne sfery to okręgi wielkie (przecięcia sfery z płaszczyzną przechodzącą przez jej środek). Wyobraźmy sobie teraz obywatela kawałka „naszej" płaszczyzny i obywatela kawałka sfery. Obaj za proste uważają geodezyjne swoich przestrzeni, mierzą kąty w częściach kąta pełnego, mierzą długości jednakowymi miarkami. Czy mogą oni eksperymentalnie stwierdzić, czy żyją w przestrzeni płaskiej, czy sferycznej? Okazuje się, że mogą: Rysują np. kąt prosty, czyli ćwierć pełnego, na jego ramionach odmierzają ten sam odcinek a, a następnie mierzą odległość dwu otrzymanych punktów. Jeżeli wyjdzie $a\sqrt{2}$, to znaczy, że jesteśmy na płaszczyźnie. Jeżeli mniej — to znaczy, że na sferze.

A JEŚLI WIĘCEJ?

Można sporządzić model również kawałka takiej dwuwymiarowej przestrzeni. Model nienajlepszy, ale łatwy w wykonaniu: Wycinamy z papieru kółko, rozcinamy je i w rozcięcie wklejamy wycinek takiego samego koła. Wyjdzie z tego coś w rodzaju siodła, ale kanciastego. Owa kanciastość to jest właśnie wada modelu. Prawdziwe kawaleryjskie siodło byłoby idealnym modelem fragmentu przestrzeni dwuwymiarowej, w której odcinek geodezyjnej, łączący końce odcinków o długości a odłożonych na ramionach kąta prostego, miałby długość większą niż $a\sqrt{2}$.
Nawiasem mówiąc, z kółka papierowego można zrobić również taki nienajlepszy model fragmentu sfery. Tylko, że po co nam przybliżanie sfery stożkami, skoro sferę każdy widział. Ale z siodłami ostatnio gorzej.

PRZESTRZEŃ ELIPTYCZNA, PARABOLICZNA I HIPERBOLICZNA

Zajmijmy się teraz następującymi trzema przestrzeniami, w których opisany wyżej pomiar daje, przy ustalonym odcinku a, wciąż ten sam wynik, a mianowicie:
I — mniejszy od $a\sqrt{2}$,
II — równy $a\sqrt{2}$,
III — większy od $a\sqrt{2}$.

Jeżeli ponadto każda z nich spełnia następujące cztery warunki:
1. przez dwa różne punkty A i B przechodzi dokładnie jedna geodezyjna (oznaczamy ją $g(AB)$),
2. dwie różne geodezyjne mają najwyżej jeden punkt wspólny,
3. istnieją trzy punkty, przez które nie przechodzi równocześnie żadna geodezyjna,
4. dla dowolnych czterech różnych punktów $ABCD$ $g(AB)$ przecina $g(CD)$ lub $g(AC)$ przecina $g(BD)$, lub $g(AD)$ przecina $g(BC)$,
to nazywamy je odpowiednio: *dwuwymiarową przestrzenią* lub *płaszczyzną*
I — *eliptyczną*,
II — *paraboliczną* (albo *euklidesową* od pierwszego kodyfikatora jej własności, Euklidesa z Aleksandrii, w. IV p. n. e.),
III — *hiperboliczną* (albo *Bolyai — Łobaczewskiego* od nazwisk dwóch jej dziewiętnastowiecznych odkrywców).

Rozwiązanie zadania M56.

Przypuśćmy, że przy ustalonym $n \geq 19$ można podzielić zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ na dwa niepuste podzbiory A i B o takiej własności, iż każda cyfra rozwinięcia dziesiętnego dowolnej liczby należącej do A jest różna od każdej cyfry rozwinięcia dziesiętnego dowolnej liczby należącej do B.

Możemy założyć, że $1 \in A$. Wówczas $10 \in A$, $11 \in A, \ldots, 19 \in A$, a więc w rozwinięciach dziesiętnych liczb należących do A występuje każda cyfra. Dowolna więc liczba należąca do B ma w swym rozwinięciu dziesiętnym jakąś cyfrę występującą w rozwinięciu którejś z liczb należących do A.
Zauważmy, że jeżeli $2 \leq n \leq 18$, to zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ można podzielić na dwa niepuste podzbiory, z których nie można wybrać po jednej liczbie tak, by rozwinięcia dziesiętne tych liczb miały wspólną cyfrę. Podzbiorami takimi są:
jeżeli $2 \leq n \leq 9$ — dowolne dwa niepuste podzbiory, których sumą jest $\{1, 2, \ldots, n\}$,
jeżeli $10 \leq n \leq 18$ — $\{1, 2, \ldots, 8, 10, \ldots, n\}$ i $\{9\}$.

O wszystkich tych geometriach będziemy jeszcze niejednokrotnie pisali. Teraz zauważmy, że sfera nie jest płaszczyzną eliptyczną (dlaczego?), dowolny mały kawałek płaszczyzny eliptycznej jest jednak taki sam jak odpowiedniej wielkości kawałek sfery. Podobnie płaszczyzna hiperboliczna jest tylko lokalnie podobna do siodła. Ale przecież i euklidesowej płaszczyzny nikt nigdy całej nie widział.
Wymienione wyżej przestrzenie to szczególny przypadek tzw. *przestrzeni riemannowskich* — od nazwiska: (Bernard) Riemann. W swojej pracy habilitacyjnej (1854) wprowadził on bardzo ogólne pojęcie przestrzeni, określając za pomocą pewnej funkcji charakter każdego z jej punktów (czy sferyczny, czy płaski, czy siodłowy, oraz czy duża jest ta sfera czy siodło). Wartość tej funkcji nazywamy *krzywizną*. Trzy wyżej opisane przestrzenie są zatem przestrzeniami riemannowskimi o *stałej krzywiźnie*.
Analogicznie wprowadza się trójwymiarowe przestrzenie eliptyczne, paraboliczne czy hiperboliczne — każda ich płaszczyzna jest odpowiedniego typu przestrzenią dwuwymiarową.

A NASZA — TO KTÓRA?

Przyzwyczailiśmy się do geometrii euklidesowej tak bardzo, że byłoby nam chyba żal, gdyby okazało się, iż to nie ona jest ,,nasza". I jeszcze do niedawna czyniono wysiłki, aby na drodze obserwacji fizycznych ustalić, że żyjemy w świecie parabolicznym. Wysiłki te jednak spełzły na niczym. Fizyka (i ta ziemska, i ta kosmiczna) nie znalazła sposobów weryfikacji. Jak to? Przecież sposób został podany na wstępie artykułu! Tak, tylko że czynności pomiarowe były tam wykonywane idealnie. W praktyce interesujące nas różnice mieszczą się w obrębie błędów pomiarowych, co jako pierwszy zauważył Gauss, tworząc z okazji prób zbadania ,,która to nasza" matematyczną teorię błędów.
Matematyków zadowala dziś stwierdzenie, że każda z trzech opisanych geometrii jest teorią jednakowo poprawną (jak zresztą i wiele innych).
A przyrodnicy? Coraz częściej uważają, że odpowiedź na to pytanie nie istnieje. Każde zjawisko należy opisywać w języku tej z geometrii, w której opis jest prostszy czy bardziej ,,elegancki". I nie należy się przejmować tym, że w każdym przypadku będzie to inna geometria.
No cóż, mam nadzieję, że Czytelnicy wraz ze mną zechcą potraktować takie stanowisko jako chwilową utratę równowagi psychicznej. Wśród wielu możliwych światów jest przecież jakiś konkretny, w którym my żyjemy. Inna rzecz, że może żadna z dotychczasowych geometrii jeszcze go nie opisuje.

Czy wiecie, że ...

Już Michał Faraday w r. 1853 zajmował się wirującymi stolikami. Wyniki swoich badań ogłosił w roczniku odkryć naukowych za rok 1854 («Annual of Scientific Discovery: or, Year-Book of Facts in Science and Art»). Wirujące stoliki były w owym okresie zabawą bardzo modną.
Może nawet czymś więcej niż zabawą. Medium, czyli człowiek o specjalnych predyspozycjach, kładł ręce na stole, koncentrował się i w pewnej chwili stolik zaczynał się poruszać. Ruch ten tłumaczono jako spowodowany zjawiskami elektrycznymi lub magnetycznymi; znacznie jednak częściej przypisywano go siłom nadprzyrodzonym.
Faraday przystąpił do systematycznych badań tego zjawiska.
W pierwszej serii doświadczeń sprawdził, czy ruch stolika zależy od materiału, jaki znajduje się pomiędzy palcami medium a blatem stołu. Żaden z badanych materiałów nie miał wpływu na przebieg doświadczenia. W drugiej serii doświadczeń umieścił pomiędzy blatem stołu a palcami medium specjalnie spreparowaną talię kart. Karty były sklejone w ten sposób, aby mogły przesuwać się jedna względem drugiej, jakkolwiek z pewnym trudem. Po przesunięciu zachowywały swoje nowe położenie. Wzajemne położenie kart przed rozpoczęciem eksperymentu zaznaczył Faraday ołówkiem. Wynik doświadczenia opisał następująco: ,,Gdy wreszcie stół, karty i ręce przesunęły się razem na lewo, wyjąłem talię i stwierdziłem, że ręce wraz z górnymi kartami przesunęły się dalej aniżeli stół i że to w rzeczywistości ręce pchały karty na lewo, a stół był ciągnięty".
Faraday zbudował jeszcze inny, bardziej złożony przyrząd i we wszystkich przypadkach właśnie ręce okazywały się tą ,,siłą napędową" poruszającą stół. Faraday był bardzo powściągliwy we wnioskach. ,,Ludzie, z którymi pracowałem byli godni zaufania" — powiedział. ,,Jest dla mnie oczywiste, że ani nie zamierzali poruszać, ani nie wierzyli, że poruszają stół dzięki zwykłej sile mechanicznej". Wniosek jednak był jednoznaczny: stół się ruszał, bo go pchano.

Wg «Scientfiic American»