Rys. 5

EFEKT FOTOELEKTRYCZNY

Jak badać? Bardzo prosto. Blaszkę cynkową łączymy z pręcikiem elektroskopu (jak na rysunku 5), ładujemy całość i oświetlamy. Tu dochodzimy do istotnego problemu. Cynk ma pracę wyjścia na tyle dużą, że aby wybijać z niego elektrony należy oświetlić go światłem nadfioletowym. Jeżeli macie dostęp do kwarcówki używanej do opalania — problem „z głowy". W przeciwnym razie popróbujcie bezpośredniego światła słonecznego (nie przez szybę — pochłania nadfiolet).
W trakcie doświadczeń przekonacie się, że światło powoduje rozładowanie tylko przy jednym znaku ładunku — ujemnym. Jeśli elektroskop naładujemy dodatnio, elektrony wybite światłem będą przyciągane z powrotem i ładunek nie będzie się zmieniać.
Osoby, które wiedzą, jak się różne rzeczy robi, żeby dobrze wyszło, proszę o ominięcie następnego fragmentu. Będą to bowiem

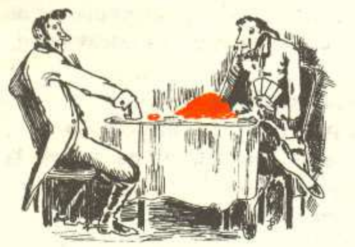
DOBRE RADY WUJKA

1. Elektrostatyka udaje się tylko na sucho, ale naprawdę na sucho.
2. Przedmioty metalowe w doświadczeniach elektrostatycznych nie powinny w miarę możności mieć ostrych końców ani krawędzi.
3. Dla uzyskania silnego efektu lampę kwarcową należy zbliżyć na odległość około 20 cm.
4. Jeżeli listek elektroskopu początkowo odchyla się dobrze, a potem szybciej lub wolniej opada, to o ile tylko nie jesteśmy na skażonym radioaktywnie terenie, najprawdopodobniej winna jest izolacja (wilgoć lub złe materiały).

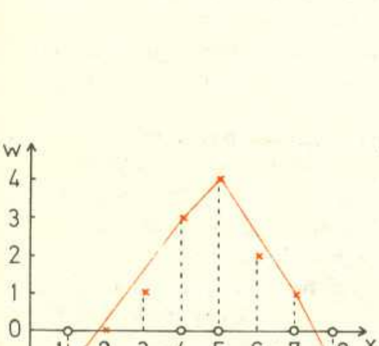
Teraz już mogą czytać wszyscy, bo wszystkim życzę powodzenia w doświadczeniach.

Kończyć czy jeszcze poczekać?

Dr Tomasz BOJDECKI



Szukaniem odpowiedzi na to nieco hamletowskie pytanie zajmuje się rachunek prawdopodobieństwa, a dokładniej — jego dział zwany „teorią optymalnego stopowania". Teoria ta stanowi efektowny przykład wykorzystania skomplikowanego, wysoce abstrakcyjnego aparatu matematycznego w tak zwanej „matematyce stosowanej", aparatu, dzięki któremu można rozwiązać wiele konkretnych zagadnień (nie zawsze intuicyjnie oczywistych), sformułowanych językiem zwykłym. W niniejszym artykule będę się starał przekonać Czytelnika o prawdziwości tego stwierdzenia; oczywiście to, co napisałem o trudnej matematyce, będzie wymagać ze zrozumiałych względów uwierzenia mi na słowo.
Przechodząc do rzeczy, przypuśćmy, że uczestniczymy w grze, której zasady można ująć w następujących punktach:
1) jest N pól ponumerowanych $1, 2, \ldots, N$;
2) na jednym z pól stoi pionek; rzucamy monetą i jeżeli upadnie ona orłem do góry przesuwamy pionek na sąsiednie pole o numerze o jeden większym, jeśli zaś reszką — na pole o numerze o jeden mniejszym; następnie znowu rzucamy monetą itd.; gra kończy się z chwilą dotarcia pionka do któregokolwiek z pól skrajnych, tzn. o numerach 1 albo N;
3) z każdym polem związana jest pewna wygrana: $w(i)$ oznacza wygraną przyporządkowaną polu o numerze i dla $i = 1, 2, \ldots, N$ ($w(i)$ może być też ujemne lub równe zeru, oczywiście „wygrana ujemna" oznacza przegraną);
4) w każdej chwili przed wykonaniem kolejnego rzutu monetą możemy wycofać się z gry; jeżeli w momencie wycofania pionek znajduje się na polu o numerze i, to nasza wygrana w całej grze równa jest $w(i)$; jeśli nie zdecydujemy się na przerwanie gry przed dojściem pionka do pola 1 albo N, to chcąc nie chcąc musimy zadowolić się wygraną, odpowiednio, $w(1)$ albo $w(N)$.
Problem polega na znalezieniu takiej strategii wycofania się z gry, która zapewniałaby największą wygraną.
Opisane zagadnienie jest typowym, a równocześnie, jak sądzę, najprostszym nietrywialnym zadaniem, którym zajmuje się teoria optymalnego stopowania. Oczywiście, problem został postawiony na razie zupełnie nieściśle. Przed dokonaniem jednak niezbędnych uściśleń warto chyba postarać się zrozumieć lepiej istotę zagadnienia. Niech na przykład $N = 8$, $w(1) = -1$, $w(2) = 0$, $w(3) = 1$, $w(4) = 3$, $w(5) = 4$, $w(6) = 2$, $w(7) = 1$, $w(8) = -1$. Wykres funkcji w (w jest tzw. „funkcją wypłaty") podany jest obok.



Niech X_0 oznacza położenie pionka w chwili zerowej (X_0 jest tzw. ,,stanem początkowym"). Przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $X_0 = 3$. Nie ma wątpliwości, iż jeśli w pewnej chwili pionek znajdzie się na polu 5, to należy grę przerwać, gdyż 5 jest punktem, w którym funkcja w przyjmuje wartość największą. Równie jasne jest jednak, że do pola 5 możemy przy nie sprzyjających okolicznościach nigdy nie dojść, wcześniej bowiem może pionek dotrzeć do jedynki. Napiszmy kilka przykładów strategii, jakimi tutaj dysponujemy:

S_1 — wycofać się z gry od razu, zanim moneta zostanie rzucona po raz pierwszy (wygrywamy 1);

S_2 — wycofać się po wykonaniu jednego rzutu monetą (wygrywamy 0 albo 3);

S_3 — czekać aż pionek osiągnie pole 5, o ile nie dojdzie wcześniej do jedynki (wygrywamy 4 albo przegrywamy 1);

S_4 — czekać aż pionek osiągnie pole 4, o ile nie dojdzie wcześniej do jedynki (wygrywamy 3 albo przegrywamy 1).

Od razu powstają pytania: Czy można uszeregować te strategie pod względem ich ,,jakości"? Czy istnieje strategia lepsza od wszystkich wymienionych wyżej, a jeśli tak, to jak ją znaleźć? Popatrzmy np. na S_2 i S_4. Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że strategia S_2 jest lepsza, gwarantuje nam bowiem, że nie przegramy. Z drugiej jednak strony stosując S_4 nie tracimy, po dojściu do pola 2, szansy dużej wygranej, której to szansy jesteśmy pozbawieni w przypadku stosowania S_2.

Aby odpowiedzieć na te pytania, trzeba wreszcie przystąpić do sformułowania naszego problemu przy pomocy ścisłego, matematycznego języka.

Rozważając doświadczenie losowe, a nasza gra jest nim niewątpliwie, zaczynamy zwykle od określenia zbioru zdarzeń elementarnych, czyli zbioru ,,najdrobniejszych" wyników eksperymentu. W naszym przypadku najwygodniej jest przyjąć, że wykonuje się cały nieskończony ciąg rzutów monetą, to znaczy, że moneta jest rzucana (np. przez jakiś automat) również i po naszym wycofaniu się z gry; założenie takie jest oczywiście dopuszczalne i w niczym nie zmienia istoty zagadnienia. W tej sytuacji zdarzeniem elementarnym w jest nieskończony ciąg orłów i reszek. Przyporządkowując orłowi jedynkę, a reszce minus jedynkę, mamy

$$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, \ldots): a_n = \pm 1 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots\}.$$

Od razu zaczynają się pewne kłopoty, bo zbiór zdarzeń elementarnych jest nieskończony, wykraczamy więc poza ,,szkolny" rachunek prawdopodobieństwa. Wcale nie jest oczywiste, jak określić prawdopodobieństwa na podzbiorach Ω. Widać, że prawdopodobieństwo powinno być takie, żeby dla każdego k naturalnego zdarzenia $\{(a_1, a_2, \ldots): a_1 = 1\}$, $\{(a_1, a_2, \ldots): a_2 = 1\}$, ..., $\{(a_1, a_2, \ldots): a_k = 1\}$ były niezależne i prawdopodobieństwo każdego z nich było równe $\frac{1}{2}$ (zdarzenie $\{(a_1, a_2, \ldots): a_k = 1\}$ oznacza po prostu, że przy k-tym rzucie wypadł orzeł). Nie wnikając w szczegóły powiem tylko, że prawdopodobieństwo P spełniające te postulaty istnieje, i to dokładnie jedno, ale, co jest raczej dziwne i interesujące, jest ono określone nie na rodzinie wszystkich podzbiorów Ω, lecz na pewnej klasie mniejszej, dostatecznie jednak dużej, by zawierać wszystkie interesujące nas zdarzenia.

Dla wygody przyjmijmy, że pionek odbywa swoją wędrówkę również i po naszym wycofaniu się z gry. Niech X_k oznacza numer pola, na którym stoi pionek po k-tym rzucie monetą, dla $k = 1, 2, \ldots$, X_k jest funkcją określoną na Ω (zmienną losową); dokładniej, zmienne losowe X_k można zdefiniować indukcyjnie: $X_{k+1}(\omega) = X_k(\omega) + a_{k+1}$, jeśli $X_k(\omega) \neq 1$ i $X_k(\omega) \neq N$ oraz $X_{k+1}(\omega) = X_k(\omega)$, jeśli $X_k(\omega) = 1$ albo $X_k(\omega) = N$, gdzie $\omega = (a_1, a_2, \ldots)$ (pamiętamy, że X_0 oznacza stan początkowy).

Zastanówmy się teraz nad ścisłą definicją strategii. Przede wszystkim zauważamy, że strategię S możemy utożsamić z funkcją określoną na Ω, bowiem zwrot ,,ustalić strategię" oznacza to samo, co ,,dla każdego $\omega \in \Omega$ umieć określić numer rzutu, po którym wycofujemy się z gry". Na przykład w rozważanej poprzednio konkretnej sytuacji, gdy $N = 8$, $X_0 = 3$ strategię S_1 można utożsamić z funkcją $S_1(\omega) = 0$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$, S_2 — z funkcją $S_2(\omega) = 1$ dla wszystkich $\omega \in \Omega$, zaś np. $S_3(1, -1, 1, 1, \ldots) = 4$, $S_3(-1, -1, \ldots) = 2$ itd.

Jasne jest jednak, że nie każdą zmienną losową o wartościach należących do zbioru 0, 1, 2, ... można nazwać strategią. W chwili wycofania się z gry znamy wszystkie wyniki rzutów monetą aż do tej chwili włącznie, natomiast nie znamy oczywiście przyszłości, jeśli zatem z ustalonej strategii wynika, że w danej serii rzutów należy wycofać się w chwili k, to decyzję o wycofaniu podejmujemy tylko na podstawie znajomości wyników k pierwszych rzutów monetą. Ściśle warunek ten formułujemy następująco:

(M) Jeżeli dla pewnego $\omega = (a_1, a_2, \ldots)$ jest $S(\omega) = k$, to dla każdego ω' postaci $\omega' = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$ również $S(\omega') = k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). (Warunek ten będziemy oznaczać literą M, ponieważ funkcję, która go spełnia, nazywa się często momentem Markowa).

W uważnym Czytelniku mogła obudzić się pewna wątpliwość. Stosowanie strategii S_3 nie zawsze prowadzi do zakończenia gry po pewnej skończonej liczbie rzutów; na przykład gdy realizuje się zdarzenie elementarne $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$, pionek wędruje cały czas z pola 3 na pole 4 i z powrotem, a nigdy nie dochodzi ani do pola 1, ani do pola 5. Naturalne jest w związku z tym przyjąć, że funkcja S może osiągać ,,wartość" $+\infty$. Sytuacja taka, że gra przedłuża się w nieskończoność, jest oczywiście niekorzystna; dlatego żądamy, żeby zbiór tych ω,

dla których $S(\omega) = +\infty$, był zdarzeniem rzadkim, praktycznie się nie realizującym, czyli żeby miał prawdopodobieństwo równe zeru.
Ostatecznie dochodzimy do następującej definicji: Strategią nazywamy dowolną funkcję $S: \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots, +\infty\}$, spełniającą warunek (M) i taką, że $P(\{\omega: S(\omega) < +\infty\}) = 1$.
Popatrzmy znowu na nasz przykład. Nie ma wątpliwości, że S_1 i S_2 są strategiami w sensie tej definicji. Chwilka zastanowienia wystarcza do stwierdzenia, że S_3 i S_4 spełniają warunek (M). To, że S_3 i S_4 są skończone z prawdopodobieństwem jeden, a więc są strategiami, jest bezpośrednim wnioskiem z interesującego, ogólnego twierdzenia, które mówi, że *pionek z prawdopodobieństwem równym jeden dojdzie kiedyś do pola* 1 *lub do pola* N, czyli

$$P(\{\omega: \quad \text{istnieje} \quad k \geqslant 0, \quad \text{że} \quad X_k(\omega) = 1 \quad \text{albo} \quad X_k(\omega) = N\}) = 1.$$

Naszkicujemy dowód tego faktu. Zauważmy przede wszystkim, że rozpatrywane prawdopodobieństwo zależy *a priori* od położenia pionka w chwili zerowej, a więc jest ono funkcją określoną na zbiorze $\{1, \ldots, N\}$. Oznaczmy tę funkcję przez p; tzn. $p(i)$ jest prawdopodobieństwem, że pionek startując z pola i dojdzie kiedyś do pola 1 albo N.
Jasne jest, że $p(1) = p(N) = 1$. Jeśli $i \neq 1$ oraz $i \neq N$, to po pierwszym rzucie monetą pionek zmieni położenie: przejdzie, z jednakowym prawdopodobieństwem, na pole $i-1$ lub na pole $i+1$. Oznacza to, że $P(\{\omega: X_1(\omega) = i-1\}) = P(\{\omega: X_1(\omega) = i+1\}) = \frac{1}{2}$. Stosując wzór „na prawdopodobieństwo całkowite" otrzymujemy:

$$p(i) = P(\{\text{pionek dojdzie kiedyś do 1 albo } N\} | \{X_1 = i-1\}) \cdot P(\{X_1 = i-1\}) + \\ + P(\{\text{pionek dojdzie kiedyś do 1 albo } N\} | \{X_1 = i+1\}) \cdot P(\{X_1 = i+1\}).$$

Jest intuicyjnie oczywiste (i niezbyt trudne do ścisłego udowodnienia), że prawdopodobieństwo warunkowe dotarcia kiedyś do pola skrajnego, jeżeli wiadomo, iż po pierwszym rzucie pionek znalazł się na polu $i-1$, jest po prostu równe prawdopodobieństwu osiągnięcia kiedyś pola 1 albo pola N, gdy położeniem początkowym jest $i-1$. Analogicznie rozumujemy w przypadku, gdy $X_1 = i+1$. W rezultacie dochodzimy do wzoru

$$p(i) = \frac{1}{2} p(i-1) + \frac{1}{2} p(i+1) \quad \text{dla} \quad i = 2, \ldots, N-1,$$

z którego wynika, że punkty o współrzędnych $(i, p(i))$ dla $i = 1, 2, \ldots, N$ leżą na jednej prostej (dlaczego?). Prosta ta, jak wiemy, przechodzi przez punkty $(1, 1)$ oraz $(N, 1)$, zatem musi być $p(i) = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, N$, c.b.d.o.
Staje teraz przed nami problem znalezienia kryterium, które pozwoliłoby określić „jakość" strategii.
Niech S będzie dowolną ustaloną strategią. Zastanówmy się nad wygraną, która przypadnie nam w udziale w wyniku zastosowania strategii S. Dla każdego zdarzenia elementarnego ω, takiego, że $S(\omega) < +\infty$ liczba $X_{s(\omega)}$ jest numerem pola, na którym stoi pionek w chwili naszego wycofania się z gry, a więc nasza wygrana równa jest $w(X_{s(\omega)})$. Widzimy zatem, że wygrana jest funkcją określoną na zbiorze $\{\omega: S(\omega) < +\infty\}$. Wygodniej jest mieć do czynienia z funkcją (zmienną losową) określoną na całym zbiorze Ω, dlatego umówmy się, że $\omega(X_{s(\omega)}) \underset{\text{def}}{=} 0$ na zbiorze $\{\omega: S(\omega) = +\infty\}$ (nie ma to zresztą żadnego znaczenia z uwagi na to, iż, jak pamiętamy, S jest skończona z prawdopodobieństwem jeden).
Gdyby strategia S była taka, że dla każdej innej strategii S' zachodziłaby nierówność $w(X_{s(\omega)}) \geqslant w(X_{s'(\omega)})$ dla wszystkich ω lub chociaż na zbiorze o prawdopodobieństwie jeden, to nie byłoby wątpliwości, że S należy uznać za strategię najlepszą. Niestety, strategia o takiej własności na ogół nie istnieje. Najrozsądniejsze, co możemy zrobić w ogólnym przypadku, to starać się maksymalizować „średnią" wygraną.
W tym miejscu mała dygresja. Przypomnijmy, że wartością oczekiwaną zmiennej losowej X, przyjmującej wartości $x_1, \ldots, x_m$ z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1, \ldots, p_m$ $(p_1 + \ldots + p_m = 1)$, nazywamy liczbę $E(X) = x_1 p_1 + \ldots + x_m p_m$. Wartość oczekiwaną interpretujemy, zgodnie z nazwą, jako średnią, przeciętną wartość przyjmowaną przez zmienną losową. Słuszność takiej interpretacji potwierdzają tzw. prawa wielkich liczb, formułowane jednak w nieco mocniejszej wersji niż ta, którą omawia się w programie szkolnym. Chodzi, z grubsza mówiąc, o to, że jeśli X jest wynikiem pewnego doświadczenia i doświadczenie to powtarzamy w sposób niezależny n razy, to średni wynik, czyli średnia arytmetyczna wyników poszczególnych doświadczeń jest, dla dużych n bliski $E(X)$.
Mam nadzieję, że powyższe uwagi przekonały Czytelnika o tym, że z dwóch strategii S', S'' tę należy uznać za lepszą, dla której wartość oczekiwana wygranej jest większa. Wróćmy znowu do naszego przykładu.

$$E(w(X_{s_1})) = E(w(X_0)) = 1,$$

$$E(w(X_{s_2})) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

widzimy więc, że strategia S_2 jest lepsza od S_1. Żeby obliczyć $E(w(X_{s_3}))$ i $E(w(X_{s_4}))$, rozpatrzymy od razu sytuację ogólną. Załóżmy mianowicie, że $1 \leqslant j_1 \leqslant X_0 \leqslant j_2 \leqslant N$, przy czym

Rozwiązanie zadania F19

Z drugiego prawa Kirchoffa dla zamkniętych obwodów prądu $ABCD$ oraz ABV wynika:

$$4E - 3Ir_w - I'r_w = 0,$$
$$E - I'r_w + iR = 0,$$

gdzie I, I' oraz i oznaczają natężenie prądów płynących odpowiednio w $BCDA$, AB oraz przez woltomierz, natomiast r_W oznacza opór wewnętrzny baterii.
Oczywiście (I prawo Kirchoffa) $I = i + I'$.
Rozwiązując układ trzech równań względem i otrzymamy

$$i \cdot (3r_w + 4R) = 0,$$

czyli natężenie prądu płynącego przez woltomierz równa się zero. Napięcie między punktami A i B wynosi więc 0.
Ten sam wynik można otrzymać jeszcze prościej, rozważając obwód $ABCD$ przed przyłączeniem woltomierza. Wówczas z drugiego prawa Kirchoffa wynika:

$$4E - 4 \cdot I \cdot r_w = 0,$$

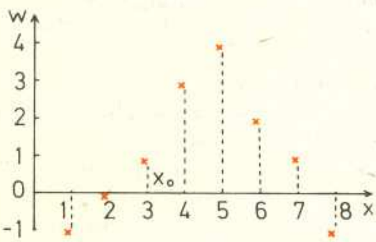
$$I = \frac{E}{r_w}.$$

Spadek napięcia między punktami AB

$$V_{AB} = E - Ir_w = 0.$$

Podłączenie woltomierza do punktów A i B niczego nie może zmienić.
Jeżeli w obwodzie 2 baterie podłączymy z przeciwnymi znakami, sumaryczna siła elektromotoryczna wyniesie 0 i prąd nie będzie płynął. Dlatego napięcie V_{AB} wyniesie E.

Rozwiązanie zadania M57.
Ponieważ punkty A i C są symetryczne względem prostej BE, więc $\sphericalangle ABF = \sphericalangle FBC$. Ponieważ $BC \| AD$, więc $\sphericalangle FBC = \sphericalangle AFB$. Jest zatem $\sphericalangle ABF = \sphericalangle AFB$, skąd $AF = AB$. Kąty BEC i CED opierają się na równych łukach, a więc prosta EC jest dwusieczną kąta BED. Ponieważ $BC \| AD$ i kąt BCE jako kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty, prosta CE jest prostopadła do prostej FD. Prosta CE jest osią symetrii trójkąta DEF, a zatem $FG = GD$.



$j_1 < j_2$, i zdefiniujmy $S_{[j_1, j_2]}(\omega) = \min\{k: X_k(\omega) = j_1 \text{ albo } X_k(\omega) = j_2\}$, czyli $S_{[j_1, j_2]}$ jest pierwszym momentem, w którym pionek osiągnie jedno z pól j_1, j_2. (Oczywiście $S_3 = S_{[1,5]}$ $S_4 = S_{[1,4]}$).
Z omawianego przed chwilą twierdzenia wynika, że $S_{[j_1, j_2]}$ jest strategią. Obliczymy $E(w(X_{S_{[j_1, j_2]}}))$. Jasne jest, że $E(w(X_{S_{[j_1, j_2]}})) = w(j_1)P(\{X_{S_{[j_1, j_2]}} = j_1\}) + w(j_2)P(\{X_{S_{[j_1, j_2]}} = j_2\}) = w(j_1)P(\{X_{S_{[j_1, j_2]}} = j_1\}) + w(j_2)(1 - P(\{X_{S_{[j_1, j_2]}} = j_1\})$; wystarczy więc obliczyć $P(\{X_{S_{[j_1, j_2]}} = j_1\})$. Rozumowanie będzie zupełnie podobne do tego, które przeprowadziliśmy poprzednio.
Prawdopodobieństwo, które mamy liczyć, zależy od stanu początkowego, a więc jest funkcją na zbiorze $\{j_1, \ldots, j_2\}$; oznaczmy tę funkcję przez r. Dla $i \neq j_1, j_2$ mamy

$$r(i) = P(\{X_{S_{[j_1, j_2]}} = j_1\} | \{X_1 = i-1\})P(\{X_1 = i-1\}) + P(\{X_{S_{[j_1, j_2]}} = j_1\} | \{X_1 = i+1\})P(\{X_1 = i+1\}) = r(i-1)\cdot\frac{1}{2} + r(i+1)\cdot\frac{1}{2}.$$

Ostatnia równość jest intuicyjnie jasna i dowód jej, podobnie jak poprzednio, pominiemy.
W konsekwencji stwierdzamy, że punkty o współrzędnych $(i, r(i))$ dla $i = j_1, \ldots, j_2$, leżą na jednej prostej, a ponieważ $r(j_1) = 1$, $r(j_2) = 0$, to prosta ta ma równanie $y = \dfrac{j_2 - x}{j_2 - j_1}$.
W rezultacie

$$r(i) = P(\{X_{S_{[j_1, j_2]}} = j_1\}) = \frac{j_2 - i}{j_2 - j_1} \quad \text{gdy} \quad X_0 = i.$$

Ostatecznie dochodzimy do wzoru:

$$E(w(X_{S_{[j_1, j_2]}})) = w(j_1)\frac{j_2 - X_0}{j_2 - j_1} + w(j_2)\frac{X_0 - j_1}{j_2 - j_1}.$$

Wzór ten ma ładną interpretację geometryczną:
Średnia wygrana, wynikająca ze stosowania strategii $S_{[j_1, j_2]}$, równa jest wartości w punkcie X_0 funkcji liniowej o wykresie przechodzącym przez punkty $(j_1, w(j_1))$, $(j_2, w(j_2))$.
Korzystając z tego ogólnego wyniku, mamy dla naszego przykładu

$$E(w(X_{S_3})) = (-1)\frac{5-3}{5-1} + 4\cdot\frac{3-1}{5-1} = \frac{3}{2},$$

$$E(w(X_{S_4})) = (-1)\frac{4-3}{4-1} + 3\cdot\frac{3-1}{4-1} = \frac{5}{3}.$$

Okazuje się więc, że spośród strategii S_1, S_2, S_3, S_4 najlepsza jest, co raczej dość trudno było przewidzieć, strategia S_4! Co więcej, patrząc na rysunek i wykorzystując wyprowadzone twierdzenie, widzimy bez trudu, że S_4 jest najlepszą strategią również spośród wszystkich strategii postaci $S_{[j_1, j_2]}$, gdzie $1 \leqslant j_1 \leqslant 3 \leqslant j_2 \leqslant 8$.
Istnieje oczywiście nieskończenie wiele strategii, które nie mają postaci $S_{[j_1, j_2]}$, ale tym niemniej ta ostatnia uwaga wydaje się nasuwać przypuszczenie, że S_4 jest najlepszą strategią w ogóle, czyli jest, jak mówimy, strategią optymalną. I jest nią rzeczywiście! Fakt ten wynika z następującego pięknego twierdzenia dotyczącego sytuacji ogólnej:
Niech w^* będzie najmniejszą funkcją „wypukłą do góry", określoną na przedziale $\langle 1, N\rangle$, taką, że $w^*(i) \geqslant w(i)$ dla $i = 1, \ldots, N$. Definiujemy:

$$Z = \{i: w^*(i) = w(i)\}$$

(Z nie jest zbiorem pustym bo zawsze $\{1, N\} \subset Z$), oraz

$$S^*(\omega) = \inf\{k: X_k(\omega) \in Z\}.$$

S^* jest strategią optymalną dla każdego stanu początkowego X_0.
Obok podajemy wykres funkcji w^* dla naszego przykładu.
Mamy tutaj $Z = \{1, 4, 5, 7, 8\}$. Tak więc uniwersalną optymalną strategią jest wycofać się w momencie, gdy pionek po raz pierwszy osiągnie którekolwiek pole o numerze ze zbioru Z. Np. jeśli $X_0 = 7$, to trzeba od razu wycofać się z gry, ale dla $X_0 = 2$ lepiej jest przystąpić do rzucania monetą. Oczywiście $S^* = S_4$, gdy $X_0 = 3$.
Warto zwrócić uwagę na to, że zgodnie z poprzednio stwierdzonymi faktami $w^*(i)$ jest maksymalną średnią wygraną, jaką możemy uzyskać, jeżeli w chwili zerowej pionek stoi na polu i.
Na zakończenie jeszcze jedna uwaga. W sformułowaniu zasad naszej gry mogło komuś nie spodobać się założenie, że przed przystąpieniem do rzutów monetą pionek znajduje się na polu X_0 (skąd się tam wziął?). Rozsądniej byłoby, być może, przyjąć, że początkowe położenie pionka zostało wylosowane czyli, że X_0 jest zmienną losową. Łatwo uwierzyć, a nietrudno sprawdzić, że również i wtedy S^* jest strategią optymalną.
Czytelnika, który dobrnął do końca, przepraszam, że nie dotrzymałem słowa i nie pokazałem zapowiedzianego we wstępie zastosowania teorii optymalnego stopowania do rozwiązywania wielu konkretnych zagadnień, ale i tak artykuł rozrósł się ponad miarę.