Geometria, prawdopodobieństwo i udana randka

Dr Ryszard ZIELIŃSKI

Masz prawo, drogi Czytelniku, być zaskoczony tym zestawieniem różnych pojęć i zdziwić się, co mogą mieć ze sobą wspólnego geometria, prawdopodobieństwo i udana randka. Dla uniknięcia nieporozumień powiem od razu, że udana randka to taka, która się w ogóle odbyła, bez względu na to, czy w czasie tej randki udało się coś komuś czy nie. Ale pogawędkę rozpocznę od geometrii i prawdopodobieństwa.

Niech dana będzie na płaszczyźnie figura geometryczna Ω taka, która ma skończone pole. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną tych wszystkich podzbiorów tej figury, które również mają pole. Zdefiniujemy funkcję P określoną dla $A \in \mathcal{A}$ za pomocą wzoru

Umawiamy się, że polem zbioru pustego jest zero.

$$P(A) = \frac{\text{Pole }(A)}{\text{Pole }(\Omega)}.$$

Bez trudu zauważamy, że funkcja P przyjmuje wartości z przedziału $\langle 0,1\rangle$, że $P(\Omega) = 1$ oraz że dla zbioru pustego $\emptyset$ jest: $P(\emptyset) = 0$. Również natychmiast widoczne jest, że jeżeli A i B są dwoma zbiorami rozłącznymi ($A, B \in \mathcal{A}$), to $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$. Nawet więcej: jeżeli $A_1, A_2, \ldots$ jest ciągiem zbiorów parami rozłącznych, to $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots$. Funkcja P o takich własnościach nazywa się prawdopodobieństwem, a dla podkreślenia faktu, że zdefiniowana jest za pomocą pól odpowiednich figur geometrycznych, nazywa się ją prawdopodobieństwem geometrycznym.

Oto dwa proste przykłady:

Przykład 1. Niech zbiorem Ω będzie figura składająca się z 52 kwadracików o jednakowym polu. Każdemu kwadracikowi przyporządkujemy wzajemnie jednoznacznie jedną z 52 kart do gry. Prawdopodobieństwo figury składającej się z tych kwadracików, którym przyporządkowano asy, jest równe 4/52. Jest to dokładnie to samo, co prawdopodobieństwo, że wyciągnięta losowo z talii karta okaże się asem! Mówiąc o prawdopodobieństwach geometrycznych mamy w tym przypadku zwykle na myśli następującą interpretację: Na figurę Ω rzucamy losowo punkt; prawdopodobieństwo tego, że upadnie on na jeden z tych kwadracików, którym przyporządkowano asy, jest równe 4/52.

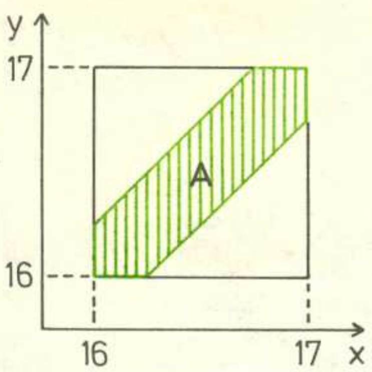
Przykład 2. Niech dany będzie na płaszczyźnie zbiór $\Omega = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$. Oczywiście Pole $(\Omega) = 1$. Zdefiniujemy zbiór A jako zbiór tych punktów kwadratu Ω, których pierwsza współrzędna jest mniejsza od drugiej: $A = \{(x, y): 0 \leqslant x < y \leqslant 1\}$. Oczywiście Pole $(A) = 1/2$. A więc prawdopodobieństwem zbioru A jest $P(A) = 1/2$. Ten wynik interpretuje się, podobnie jak w poprzednim przykładzie, w następujący sposób: Na kwadrat jednostkowy Ω rzucamy losowo punkt; prawdopodobieństwo, że upadnie on na trójkąt A, jest równe 1/2. Można to również interpretować inaczej: jeżeli w kwadracie wybierzemy losowo punkt (tak jak wybieramy losowo kartę z talii), to z prawdopodobieństwem 1/2 okaże się, że punkt ten należy do trójkąta A. I jeszcze jedna interpretacja: koledzy X i Y wybierają losowo i niezależnie od siebie liczbę z przedziału $\langle 0,1\rangle$. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że liczba wybrana przez kolegę X okaże się mniejsza od liczby wybranej przez kolegę Y, jest równa 1/2.

Uzbrojeni w przedstawioną wyżej teorię możemy wrócić do sprawy naszej randki.

Rozwiążemy mianowicie następujące zadanie. Jola i Wojtek umówili się, że każde z nich przyjdzie na wyznaczone miejsce między godziną 16 i 17 i będzie czekało na drugie 15 minut, ale nie dłużej niż do godziny 17. Jeżeli w ciągu tego czasu drugie z nich nie przybędzie, osoba czekająca opuszcza miejsce spotkania.

Zakładając, że oboje zjawiają się w umówionym miejscu w sposób losowy, obliczyć prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania.

Oznaczmy przez x chwilę przybycia Joli i przez y chwilę przybycia Wojtka. Parę (x, y) będziemy interpretowali jako punkt na płaszczyźnie. Figurą Ω będzie teraz zbiór $\{(x, y): 16 \leqslant x \leqslant 17, 16 \leqslant y \leqslant 17\}$. Zbiór A ma postać $\{(x, y): 16 \leqslant x \leqslant 17, 16 \leqslant x \leqslant 17, |x-y| \leqslant 1/4\}$. Pole $(\Omega) = 1$, Pole $(A) = 7/16$. Prawdopodobieństwo,



że randka uda się, jest więc równe 7/16. Zauważmy, że chociaż każda z umawiających się osób czeka najwyżej 1/4 okresu czasu wyznaczonego na spotkanie, to prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania, równe jest prawie 1/2.

Zadanie dla Czytelnika: Przypuśćmy, że w powyższym przykładzie J i W umawiają się w następujący sposób: każde z nich będzie czekało na drugie t minut, ale nie dłużej niż do godz. 17. Jakie powinno być t, aby prawdopodobieństwo, że dojdzie do spotkania, było duże, powiedzmy większe od $1-\varepsilon$?

Aby pokazać Czytelnikowi, że prawdopodobieństwa geometryczne służą również mniej błahym sprawom, zacytuję dwa zadania, poprzedzając je jednak dwiema uwagami.

Uwaga 1. Mówiąc o losowym rzucaniu punktu na figurę Ω (lub o losowym wyborze punktu z Ω) mamy na myśli takie rzucanie, przy którym punkt z jednakowym prawdopodobieństwem może upaść na każde miejsce figury. Mówiąc dokładniej: prawdopodobieństwo, że punkt upadnie na pewien podzbiór danej figury, zależy tylko od pola tego podzbioru, a nie zależy ani od jego kształtu, ani od jego położenia wewnątrz Ω. W takich sytuacjach mówi się również, że punkt ma rozkład jednostajny (lub: równomierny) na figurze Ω.

Uwaga 2. Zupełnie analogicznie można mówić o figurach geometrycznych na prostej lub o figurach w przestrzeni trójwymiarowej (lub więcejwymiarowej). Wtedy „pole" należy zastąpić przez „długość" lub „objętość".
A teraz dwa zapowiedziane zadania.

Zadanie 1 (A. Plucińska, E. Pluciński: Zadania z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla studentów politechnik). Przez jednotorowy odcinek drogi o końcach A, B przejechać mają dwa tramwaje jadące z przeciwnych kierunków niezależnie od siebie. Pierwszy tramwaj przybywa do A w chwili t_1, drugi do B w chwili t_2, przy czym $T' \leqslant t_1 \leqslant T''$, $T' \leqslant t_2 \leqslant T''$. Wszystkie punkty odcinka $\langle T', T'' \rangle$ są jednakowo prawdopodobne. Niech $T''-T' = 15$ minut. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że jeden z tramwajów będzie musiał czekać, aż drugi przejedzie, jeśli a) czas przejazdu przez odcinek AB wynosi 3 min., b) czas przejazdu od A do B wynosi 3 min., a od B do A — 2 min.

Zadanie 2 (L. D. Mieszałkin: Zadania z rachunku prawdopodobieństwa). Dla złożenia łożyska kulkowego konieczne jest, aby związek między promieniem R zewnętrznej obręczy, promieniem r wewnętrznej obręczy i średnicą d kulek (rozrzut promieni kulek pochodzących z jednej partii produkcji jest na tyle mały, że można go zaniedbać) wyrażał się wzorem

$$0 \leqslant R-r-d \leqslant \delta.$$

Załóżmy, że R, r i d są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinkach $\langle 50{,}0,\ 51{,}0 \rangle$, $\langle 40{,}0,\ 41{,}0 \rangle$, $\langle 9{,}5,\ 10{,}0 \rangle$. Obliczyć prawdopodobieństwo złożenia łożyska dla $\delta = 0{,}5$ mm.

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M 52. Udowodnić, że płaszczyzna pozbawiona jednego punktu nie jest sumą prostych rozłącznych.
Rozwiązanie na str. 7.

M 53. Udowodnić, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to liczba $27^{n+1}-27-26n$ jest podzielna przez 169.
Rozwiązanie na str. 5.

M 54. Na wieczorku było 28 pań i 28 panów. Każdy z obecnych tam panów znał dokładnie dwie obecne panie i każda z pań znała dokładnie dwóch panów. Wykazać, że w pierwszym tańcu każda para mogła składać się z osób znających się. (Przyjmujemy, że jeżeli pan A zna panią X, to pani X zna pana A).
Rozwiązanie na str. 15.

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

Rys. 1

F 19. Na poziomym gładkim stole położono wyprostowaną, nierozciągliwą linę o długości l i masie M, w ten sposób, że część liny zwisa pionowo w dół. Pod wpływem własnego ciężaru lina zaczęła zsuwać się ze stołu. Opiszcie ruch końca liny, jeżeli tarcie liny o powierzchnię stołu można pominąć, a w chwili początkowej długość zwisającej części liny wynosiła l_0 ($l_0 < l$). Sprawdźcie, czy otrzymane przez Was rozwiązanie spełnia zasadę zachowania energii oraz czy opisuje ruch liny aż do ostatecznego zsunięcia się jej ze stołu.
Rozwiązanie na str. 2.