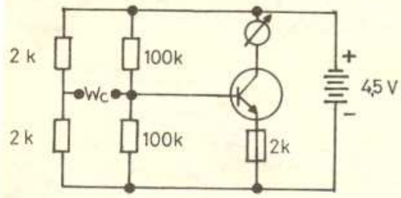
A MOŻE BY TO JESZCZE POPRAWIĆ?



Rys. 6

Można. Jeżeli postaracie się o odpowiedni tranzystor, zbudowany z niego i paru oporników wzmacniacz prądu stałego powiększy czułość przyrządu. Trzeba tylko połączyć schemat według rys. 6. Tranzystor może być np. typu BCP109C lub inny o podobnym wzmocnieniu. Położenie zerowe igły magnetycznej przy użyciu wzmacniacza będzie inne niż bez niego, ale przy cechowaniu weźmiemy to pod uwagę. Jeżeli będziecie lutowali tranzystory, pamiętajcie o uchwyceniu wyprowadzeń szczypcami między tranzystorem a miejscem lutowania w celu odprowadzenia ciepła, tranzystory bowiem nie lubią wysokiej temperatury! Jeżeli pójdziecie za moją radą, wyposażycie swoje domowe laboratorium w przyrząd niezbyt precyzyjny, ale za to umożliwiający wykonanie szeregu ciekawych doświadczeń. Jakich? Nad tym zastanowimy się wspólnie w przyszłości.

O przestrzeniach metrycznych (II)

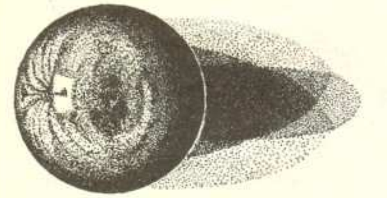
Doc. dr Maria MOSZYŃSKA

Jednym z podstawowych pojęć metrycznych jest pojęcie kuli. Jest to naturalne uogólnienie na dowolną przestrzeń metryczną pojęcia dobrze wszystkim znanego. Rozważmy najpierw przestrzeń euklidesową trójwymiarową E^3 ze zwykłą metryką, tzn. z metryką określoną przez wzór

$$\varrho(p,q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

dla punktów p i q o współrzędnych (x_1, x_2, x_3) i (y_1, y_2, y_3). Kulą o środku a i promieniu $\lambda > 0$ jest — w potocznym sensie — podzbiór tej przestrzeni złożony z punktów odległych od a nie więcej niż o λ (tj. takich x, dla których $\varrho(x, a) \leqslant \lambda$). Nam będzie chodziło o zbiór tych punktów x, dla których

$$\varrho(x, a) < \lambda.$$



Rys. 1

Tak czy inaczej wyraz „kula" kojarzy się u większości ludzi z figurą przedstawioną na rys. 1.
Pojęcie kuli w dowolnej przestrzeni metrycznej stanowi uogólnienie pojęcia takiej właśnie zwykłej kuli. Rozważmy przestrzeń metryczną (X, ϱ), punkt a ze zbioru X i liczbę $\lambda > 0$. *Kulą o środku a i promieniu* λ (w przestrzeni (X, ϱ)) nazywamy zbiór wszystkich punktów x zbioru X spełniających nierówność

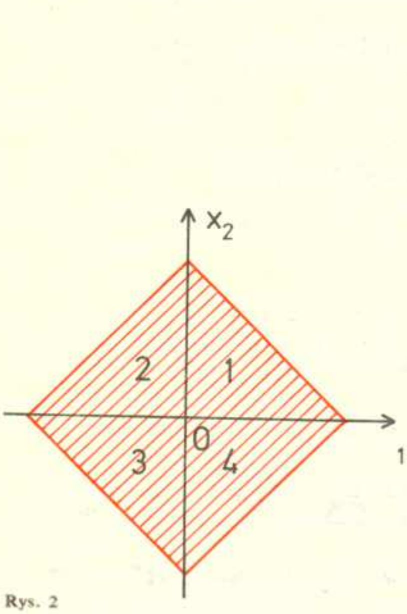
$$\varrho(x, a) < \lambda.$$

Zbiór ten będziemy oznaczać symbolem $K_{(X,\varrho)}(a, \lambda)$ lub — jeśli to nie prowadzi do nieporozumienia — po prostu $K(a, \lambda)$.
Jasne jest, że kulami na płaszczyźnie z metryką kartezjańską (tzn. zwykłą) są koła bez brzegu. A jak wyglądają kule w innych przestrzeniach metrycznych, o których była mowa w I części tego artykułu? Niech na przykład $(E^2, \bar{\varrho})$ będzie płaszczyzną z metryką miejską; sprawdźmy, czym jest kula o środku w początku układu współrzędnych O i o promieniu $\lambda = 1$. Jest to zbiór opisany przez nierówność

$$|x_1|+|x_2| < 1,$$

która jest równoważna z alternatywą następujących czterech formuł:

$$\begin{array}{llllll}
(1) & x_1 \geqslant 0 & \text{i} & x_2 \geqslant 0 & \text{i} & x_1+x_2-1 < 0, \\
(2) & x_1 \leqslant 0 & \text{i} & x_2 \geqslant 0 & \text{i} & -x_1+x_2-1 < 0, \\
(3) & x_1 \leqslant 0 & \text{i} & x_2 \leqslant 0 & \text{i} & -x_1-x_2-1 < 0, \\
(4) & x_1 \geqslant 0 & \text{i} & x_2 \leqslant 0 & \text{i} & x_1-x_2-1 < 0.
\end{array}$$



Rys. 2

Formuły (1)–(4) opisują zbiory zaznaczone odpowiednio na rys. 2. A więc rozważana kula jest kwadratem (bez brzegu), którego przekątne leżą na osiach układu współrzędnych i mają długość 2.
Kształty kul na płaszczyźnie z metryką kolejową ϱ^* są jeszcze mniej podobne do kształtu „zwykłej" kuli, tj. kuli na płaszczyźnie kartezjańskiej (patrz zadanie 1).
Posługując się pojęciem kuli można zdefiniować szereg pojęć, które różnią się w sposób bardzo istotny od poznanych dotychczas. Na czym ta różnica polega, postaramy się wyjaśnić w III części tego artykułu.

Ustalmy teraz przestrzeń metryczną (X, ϱ) i weźmy pod uwagę podzbiór A zbioru X. Określimy dwa zbiory: *wnętrze* zbioru A, które oznacza się symbolem Int A (łac. *interna*), oraz *domknięcie* zbioru A, które oznacza się symbolem Cl A (łac. *clausura*) bądź też po prostu $\overline{A}$.

Int A jest zbiorem tzw. punktów wewnętrznych zbioru A, tj. punktów x ze zbioru X spełniających następujący warunek:

$$\text{istnieje liczba } \lambda > 0, \quad \text{taka że} \quad K(x, \lambda) \subset A.$$

Oczywiście mowa tu o kuli w przestrzeni (X, ϱ), a więc zbiór Int A zależy od przestrzeni, w której dany zbiór A został umieszczony. Np. wnętrze odcinka traktowanego jako podzbiór prostej euklidesowej składa się ze wszystkich jego punktów z wyjątkiem końców, natomiast wnętrze tego samego odcinka traktowanego jako podzbiór płaszczyzny z metryką kartezjańską jest zbiorem pustym. Dlatego czasem lepiej zaznaczyć, o jaką przestrzeń chodzi, pisząc $\mathrm{Int}_{(X, \varrho)} A$ zamiast Int A.

Warto zauważyć, że dla dowolnego podzbioru A płaszczyzny E^2 zachodzi równość

$$\mathrm{Int}_{(E^2, \varrho)} A = \mathrm{Int}_{(E^2, \overline{\varrho})} A,$$

tzn. wnętrze zbioru A jest takie samo w przypadku metryki kartezjańskiej, jak miejskiej, mimo że, jak wiemy, kule w metryce kartezjańskiej i w miejskiej różnią się kształtem. Czytelnik sam zastanowi się nad tym, czy zastępując metrykę miejską $\overline{\varrho}$ przez kolejową ϱ^* również nie zmienimy wnętrz dowolnych podzbiorów. Pomoże mu w tym zadanie 3.

Cl A można zdefiniować tak: Niech $X - A$ będzie zbiorem tych wszystkich punktów przestrzeni X, które nie należą do A, czyli tzw. dopełnieniem zbioru A. Domknięciem zbioru A jest dopełnienie zbioru Int $(X - A)$, tzn.

$$\mathrm{Cl}\, A = X - \mathrm{Int}\, (X - A).$$

Sens tego pojęcia ilustruje zadanie 4.

Pojęcia wnętrza i domknięcia pozwalają wyróżnić pewne klasy podzbiorów przestrzeni (X, ϱ). Zbiór A jest *otwarty* w przestrzeni (X, ϱ) wtedy i tylko wtedy, gdy jest identyczny ze swoim wnętrzem, tj. $A = \mathrm{Int}_{(X, \varrho)} A$, a jest *domknięty*, jeżeli pokrywa się ze swym domknięciem, tj. $A = \mathrm{Cl}_{(X, \varrho)} A$. Zbiór A jest *brzegowy*, jeżeli jego wnętrze jest puste, tj. $\mathrm{Int}_{(X, \varrho)} A = \emptyset$, a jest *gęsty*, jeżeli jego domknięcie jest całym zbiorem X, tj. $\mathrm{Cl}_{(X, \varrho)} A = X$.

Stąd i z definicji domknięcia wynikają bezpośrednio następujące związki:

(a) Zbiór A jest domknięty w X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $X - A$ jest otwarty.

(b) Zbiór A jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy $X - A$ jest brzegowy.

Zauważmy, że przestrzenie (E^2, ϱ) i $(E^2, \overline{\varrho})$ mają te same klasy zbiorów otwartych (podobnie: domkniętych, gęstych, brzegowych). Czytelnik może sam się przekonać, że dla przestrzeni (E^2, ϱ^*) sytuacja jest odmienna (patrz zad. 5).

O takich dwóch metrykach ϱ_1 i ϱ_2 w zbiorze X, dla których klasy zbiorów otwartych w (X, ϱ_1) i w (X, ϱ_2) są identyczne, mówi się, że są *topologicznie równoważne*. A więc metryka kartezjańska jest topologicznie równoważna miejskiej, ale nie jest równoważna kolejowej.

Omawianą tematykę można znaleźć np. w podręczniku K. Kuratowskiego *Wstęp do teorii mnogości i topologii*.

Zadania

1. Narysować kulę $K(a, \lambda)$ na płaszczyźnie z metryką kolejową ϱ^*, przyjmując
a) jako a — początek układu o oraz λ dowolne,
b) jako a — punkt różny od o oraz $\lambda \leqslant \varrho^*(a, o)$
c) jako a — punkt różny od o oraz $\lambda > \varrho^*(a, o)$.
2. Dowieść, że w dowolnej przestrzeni metrycznej
$\mathrm{Int}\, K(a, \lambda) = K(a, \lambda)$.
3. Dane są dwie metryki w zbiorze X, ϱ_1 i ϱ_2. Dowieść, że następujące dwa warunki są równoważne:
(1) $\mathrm{Int}_{(X, \varrho_1)} A = \mathrm{Int}_{(X, \varrho_2)} A$ dla każdego podzbioru A,
(2) każda kula $K_{(X, \varrho_1)} (a, \lambda)$ zawiera pewną kulę $K_{(X, \varrho_2)} (a, \lambda')$ i, na odwrót, każda kula $K_{(X, \varrho_2)} (a, \lambda)$ zawiera pewną kulę $K_{(X; \varrho_2)} (a, \lambda')$.
Wskazówka. W dowodzie implikacji (1) → (2) wygodnie jest skorzystać z zad. 2.
4. Wykazać, że zbiór $\mathrm{Cl}(K_{(X, \varrho)} (a, \lambda))$ składa się z tych wszystkich punktów x zbioru X, dla których $\varrho(x, a) \leqslant \lambda$.
5. Podać przykład podzbioru płaszczyzny E^2, który jest otwarty w przestrzeni (E^2, ϱ^*), ale nie jest otwarty w przestrzeni (E^2, ϱ). Czy może być na odwrót?

Rozwiązanie zadania M49.

Takimi prędkościami są $\frac{v}{2k+1}$, gdzie k jest liczbą naturalną. Wykażemy to dla $k = 1$ (dowód dla innych k jest podobny). Załóżmy mianowicie, że wraz z samochodem A jadącym z prędkością $\frac{v}{3}$ wjeżdża na skrzyżowanie X (przy zielonym świetle) samochód B jadący z prędkością v. Samochód B dojeżdża do kolejnego skrzyżowania, wraca do X i jeszcze raz zmienia kierunek jazdy. Dojedzie on oczywiście do drugiego skrzyżowania razem z samochodem A, który napotka wobec tego zielone światło.