wyjątkową pozycję wśród wszystkich gałęzi nauk przyrodniczych. Można chyba zaryzykować twierdzenie, że jej stworzenie było największą z dotychczas dokonanych rewolucji w nauce, gdyż jej implikacje sięgają najgłębiej, do samych podstaw teorii naukowej, którymi są reguły rozumowania logicznego.

Tak mocne podkreślenie odrębności teorii kwantowej może wywołać zrozumiałe zdziwienie słuchaczy: Przecież cały otaczający nas świat zbudowany jest z atomów! Jak to jest więc możliwe, że inne prawa są „obowiązujące" dla całości, a inne dla jej części składowych?

Źródłem tej pozornej sprzeczności jest trudna do wyobrażenia mnogość atomów w każdym dostrzegalnym skrawku otaczającej nas substancji. Gdyby np. atomy żelaza składające się na główkę szpilki rozsiać równomiernie po całej Polsce, to na każdy centymetr kwadratowy powierzchni naszego kraju przypadłby tysiąc atomów. Otóż zjawiska bezpośrednio obserwowane powstają przez nałożenie się ogromnej liczby zjawisk elementarnych, wywołanych przez pojedyncze atomy. To, co się dzieje z jednym atomem, nie odgrywa znacznej roli; ważne jest to, co się dzieje z większością atomów w dostrzeganym przez nas świecie; występują nowe prawidłowości. Prawa rządzące takimi zbiorowiskami mają charakter statystyczny, bo wyznaczają tylko najbardziej prawdopodobne zachowanie się obiektów.

Pojęcie prawdopodobieństwa jest właśnie kluczem do zrozumienia związku między logiką kwantową i logiką klasyczną.

Logika klasyczna jest przybliżeniem logiki kwantowej, ale wynikające z tego przybliżenia ewentualne odstępstwa, w świecie postrzegalnym bezpośrednio zmysłami, są niesłychanie mało prawdopodobne, ledwie możliwe do zauważenia. Posłużymy się znów przykładem ziarnka piasku i pudełka od zapałek. Owa trzecia, kwantowa możliwość, czyli nieoznaczone położenie ziarnka — ani w pudełku, ani poza nim — nie występuje prawie nigdy. Słowo „prawie" oznacza w tym przypadku, że liczba wszystkich ziarenek piasku na Ziemi i czas istnienia cywilizacji na naszej planecie są współmiernie małe, tak że nie istnieje szansa zaobserwowania takiego właśnie, konkretnego odstępstwa od klasycznej logiki. Dlatego w zastosowaniu do wszelkich naszych bezpośrednich obserwacji w zakresie poznanych dotąd zjawisk możemy ją traktować jako przybliżenie idealne.

Można snuć jednak fantastyczne przypuszczenia na temat istnienia wspomnianych już odstępstw od logiki klasycznej w dziedzinie zjawisk, które dopiero zaczniemy dokładniej poznawać. Nie mam tu na myśli zjawisk noszących miano „nadprzyrodzonych". Chodzi mi raczej o takie zjawiska, co do których istnienia nie ma wątpliwości, jak np. życie czy świadomość ludzka. Być może wyjaśnienie tych fascynujących zagadek będzie wymagać równie radykalnych zmian w regułach myślenia, jakich wymagało wyjaśnienie zjawisk atomowych.

«Młody Matematyk» — czasopismo dla młodzieży szkolnej

Mgr Władysław DUBIEL

ROK I　　MARZEC 1931　　NR. 3

MŁODY MATEMATYK

CZASOPISMO DLA MŁODZIEŻY SZKOLNEJ WYCHODZI POD REDAKCJĄ A. M. RUSIECKIEGO PRZY WSPÓŁUDZIALE S. STRASZEWICZA.

TREŚĆ: J. Gadomski. Odkrycie Plutona. — A. Tarski. O stopniu równoważności wielokątów. — Rozwiązania zadań Nr. 40 i 57. — Zadania Nr. 167 — 181.

W latach 1930–1932 wychodziło w Poznaniu czasopismo matematyczne «Parametr», poświęcone nauczaniu matematyki. W styczniu 1939 r. czasopismo to zostało reaktywowane i wychodziło do wybuchu drugiej wojny światowej.

Było to pierwsze tego typu czasopismo w Polsce. Założycielem i redaktorem był Antoni Marian Rusiecki, zaś współredaktorem Stefan Straszewicz. Ich współpracownikami byli czołowi matematycy i nauczyciele matematyki szkół różnych typów.

W czasopiśmie pojawiały się dość regularnie pewne stałe działy. Jednym z nich był dział dla młodzieży szkolnej. W 1931 r. wzbogacono pismo dodatkiem «Młody Matematyk» o wyraźnie zarysowanej autonomii. «Młody Matematyk» przeznaczony był dla uczniów gimnazjów i zakładów kształcenia nauczycieli. Od stycznia 1931 do grudnia 1932 r. ukazało się 10 zeszytów.

Przegląd zawartości działów dla młodzieży «Parametra» oraz «Młodego Matematyka» wskazuje, że redaktor do współpracy pozyskał niektórych wybitnych matematyków, między innymi Hugona Steinhausa i Alfreda Tarskiego oraz nauczycieli matematyki pracujących w szkołach. Wystarczy wymienić tutaj takie nazwiska, jak Stefan Kulczycki, Władysław Wójtowicz, Adam Zarzecki. Znaczną część artykułów dla młodzieży opracował redaktor A. M. Rusiecki.

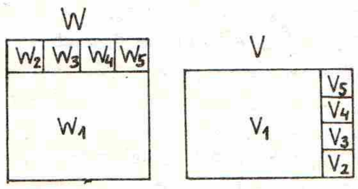
Czasopismem «Młody Matematyk» żywo interesowali się uczniowie, o czym świadczy liczba nadesłanych rozwiązań zadań w ramach nieustającego konkursu. «Młody Matematyk» zamieszczał również artykuły, których autorami byli uczniowie. Do takich należą Marek Katz — autor artykułu *O nowym sposobie rozwiązywania równań trzeciego stopnia* («Parametr», nr 4–5) i Bronisław Bajrach — autor opracowania *Tablice do permutacyj* («Parametr», nr 8–10). Zarówno w «Parametrze», jak też w «Młodym Matematyku» spotykamy artykuły wykraczające poza czystą

matematykę, opisujące małe i wielkie odkrycia, a również drobne fakciki podpatrzone w życiu. Wśród artykułów poświęconych wybranym zagadnieniom z arytmetyki i algebry oraz geometrii warto wymienić A. M. Rusieckiego *Algebraiczna metoda rozwiązywania zagadnień* i *Zagadnienia niedostatecznie sprecyzowane*, Kazimierza Cwojdzińskiego *Kilka słów o ciągach*, Władysława Wójtowicza *Sposoby elementarne wyznaczania maximum funkcji* i *Jak Ceva znajdował twierdzenia geometryczne za pomocą statyki* (Giovanni Ceva — znakomity matematyk włoski, żyjący w latach 1648–1734), Alfreda Tarskiego *O stopniu równoważności wielokątów* i Stefana Kulczyckiego *O najszczelniejszym rozmieszczeniu kul w przestrzeni.* Z zastosowań matematyki na szczególną uwagę zasługuje bardzo interesujący artykuł Hugona Steinhausa *Longimetr*; autor ten w niezwykle ciekawy sposób opisuje i uzasadnia metodę mierzenia długości linii krzywych na przykładzie litery „S". Godne odnotowania są również: artykuł Petre Sergescu (prof. Uniwersytetu w Cluj — Rumunia) przedstawiający zasadnicze rysy matematyki w starożytności oraz artykuł A. M. Rusieckiego informujący o języku *interlingua.* Jest to międzynarodowy język pomocniczy stworzony przez prof. Giuseppe Peano (matematyk i logik włoski, żyjący w latach 1858–1932). W języku tym podawało czasopismo przy końcu każdego zeszytu swoją zawartość
W «Młodym Matematyku» znajdujemy piękne zadania, są też rozwiązania zadań pochodzące od uczniów — czytelników czasopisma. Artykuły, ciekawostki i „sztuczki matematyczne" podane w „Zapiskach" i w „Kąciku bez tytułu" czyta się z wielką przyjemnością.
Zamieszczony poniżej artykuł A. Tarskiego oraz wybrane z różnych działów zadania pochodzą z numeru 3, 1931, «Młodego Matematyka».

O stopniu równoważności wielokątów

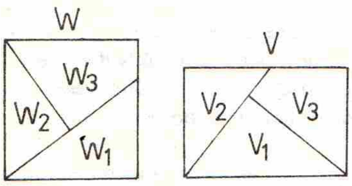
Dr Alfred TARSKI (Warszawa)

W artykule tym pragnę omówić pewne pojęcia, należące całkowicie do zakresu geometrii elementarnej, a dotąd niemal wcale nie zbadane.
Jak wiadomo, dwa wielokąty W i V nazywamy równoważnymi, wyrażając to wzorem: $W \sim V$, jeżeli dają się one podzielić na jednakową ilość wielokątów odpowiednio przystających. Ten podział wielokątów równoważnych na części przystające nie jest jednoznaczny: dwa wielokąty równoważne dają się podzielić na części przystające w sposób rozmaity zarówno pod względem liczby, jak i kształtu tych części. Wyjaśnimy to na przykładzie.



Rys. 1

Zarówno rys. 1, jak i rys. 2, wykazują, że kwadrat o boku a oraz prostokąt o bokach $\frac{5}{4}a$ i $\frac{4}{5}a$ są sobie równoważne, ale ich podziały na obu rysunkach są zgoła różne.
W związku z tem spostrzeżeniem nasuwa się w sposób naturalny pytanie: na jaką *najmniejszą* liczbę części odpowiednio przystających można podzielić dwa dane wielokąty równoważne? Zagadnienia tego właśnie typu pragniemy poruszyć w „Parametrze".
W tym celu przyjmiemy następującą definicję:
Stopniem równoważności dwóch wielokątów równoważnych W i V nazywamy *najmniejszą* liczbę naturalną n, czyniącą zadość warunkowi: każdy z wielokątów W i V daje się podzielić na n wielokątów w ten sposób, że wielokąty, otrzymane z podziału W odpowiednio przystają do wielokątów, otrzymanych z podziału V.[1]) — Stopień równoważności wielokątów W i V będziemy oznaczali symbolem: $\delta(W, V)$.

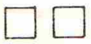


Rys. 2

Należy tu uczynić pewną uwagę. Wyrazowi „wielokąt" dogodnie jest nadać w niniejszych rozważaniach znaczenie szersze niż to, które jest stosowane w początkach nauczania geometrii elementarnej. Mianowicie, *wielokątem w znaczeniu szerszem* nazywamy tu figurę płaską, która jest *zestawieniem* skończonej liczby wielokątów w pospolitem znaczeniu tego wyrazu. Tak np. wielokątem w znaczeniu szerszem jest figura, złożona z prostokątów 2 i 4 na rys. 1, lub też figura, złożona z obu tych prostokątów i ponadto czworokąta 3 na rys. 2. Zaznaczamy mimochodem, że rozszerzenie pojęcia wielokąta jest niezmiernie użyteczne w całej teorji równoważności wielokątów: bez tego rozszerzenia wiele rozumowań z tej teorji, spotykanych w podręcznikach elementarnych, grzeszy brakiem ścisłości.

[1]) O ile nam wiadomo, pojęcie to wprowadził Dr. Adolf Lindenbaum (Warszawa), który wraz z autorem artykułu ustalił pewne własności tego pojęcia.

W zastosowaniu do wielokątów w znaczeniu szerszem nastręcza pewną trudność poprawne zdefiniowanie pojęcia przystawania. Ograniczymy się tu do następującego wyjaśnienia poglądowego: dwa wielokąty w znaczeniu szerszem — podobnie jak i wszelkie figury geometryczne — przystają, jeżeli jeden z nich można „nałożyć" na drugi (nie zmieniając wzajemnego położenia składowych części żadnego z nich) w ten sposób, aby się „pokryły". Tak np. wielokąt, przedstawiony na rys. 3, nie przystaje do wielokąta, przedstawionego na rys. 4, ale jest z nim równoważny.


Rys. 3


Rys. 4

O stopniu równoważności wielokątów wiemy dotychczas bardzo mało. Podamy tu przykładowo kilka elementarnych własności tego pojęcia.

1. *Dla dowolnych wielokątów równoważnych W i V jest*

$$\delta(W,V) = \delta(V,W).$$

2. *Na to, by $\delta(W,V) = 1$, potrzeba i wystarcza, by wielokąty W i V przystawały; w szczególności, dla dowolnego wielokąta W mamy $\delta(W,W) = 1$.*
3. *Jeżeli wielokąt W możemy podzielić na wielokąty W_1 i W_2, a wielokąt V — na wielokąty V_1 i V_2 w ten sposób, iż $W_1 \sim V_1$ i $W_2 \sim V_2$, to $\delta(W,V) \leqslant \delta(W_1,V_1)+\delta(W_2,V_2)$.*
4. *Jeżeli $W \sim U$ i $V \sim U$, to $\delta(W,V) \leqslant \delta(W,U) \cdot \delta(V,U)$.*

Własności 1–3 są oczywiste. Uzasadnienie własności 4 również nie nastręczy trudności tym z pośród Czytelników, którzy uprzytomnią sobie zastosowanie metody t.zn. *podwójnej sieci podziału* do dowodu twierdzenia, w myśl którego dwa wielokąty, równoważne trzeciemu, są sobi równoważne.

Dla sfomułowania następnej własności potrzebne jest pojęcie średnicy wielokąta.

Średnicą wielokąta W, symbolicznie: $\sigma(W)$, nazywamy najdłuższy z pośród odcinków, łączących dwa punkty wielokąta W. Łatwo okazać, że każdy wielokąt posiada średnicę (może być wiele średnic przystających).

5. Jeżeli W i V są to wielokąty równoważne, przyczem W jest wielokątem wypukłym, to

$$\delta(W,V) \geqslant \frac{\sigma(W)}{\sigma(V)}$$

Dowód. Zastosujmy rozumowanie apagogiczne. Przypuśćmy mianowicie, że wbrew tezie twierdzenia 5

(1) $$\delta(W,V) = n < \frac{\sigma(W)}{\sigma(V)}.$$

Wynika stąd natychmiast, że

(2) $$\sigma(V) < \frac{\sigma(W)}{n}.$$

Zgodnie z określeniem średnicy, w wielokącie W znaleźć można dwa takie punkty A_0 i A_n, które są końcami średnicy $\sigma(W)$. Podzielimy A_0A_n na n przystających części, i niech $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ będą to punkty podziału. Każdy z odcinków A_kA_{k+1} (gdzie $0 \leqslant k < n$) przystaje do n-ej części średnicy $\sigma(W)$, a zatem wobec (2) mamy: $A_kA_{k+1} > \sigma(W)$; wnosimy stąd, że tem bardziej

(3) $A_kA_l > \sigma(V)$ dla dowolnych różnych liczb naturalnych k i l, zawartych między 0 i n.

W myśl definicji stopnia równoważności, z (1) wynika, że wielokąty W i V dają się podzielić na n części odpowiednio przystających; niech $W_1, W_2, \dots, W_n$ będą to wielokąty, otrzymane z podziału W, a $V_1, V_2, \dots, V_n$ — odpowiednio przystające do nich wielokąty, otrzymane z podziału V.

Jak wiemy, punkty A_0 i A_n należą do wielokąta W; ponieważ W jest na mocy założenia wielokątem wypukłym, więc wszystkie punkty odcinka A_0A_n w szczególności zaś $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ należą do W. W ten sposób w wielokącie W wyróżniamy $n+1$ punktów $A_0, A_1, \dots A_n$, a równocześnie podzieliliśmy ten wielokąt na n części $W_1, W_2, \dots W_n$. Wnosimy stąd, że choć dwa ze wskazanych punktów należą do tej samej części, np. punkty A_k i A_l ($k \neq l$) należą do części W_m.

Ponieważ wielokąty W_m i V_m przystają, przeto w wielokącie V_m możemy oczywiście znaleźć takie dwa punkty B_k i B_l, że odcinek B_kB_l przystaje do odcinka A_kA_l. Punkty B_k i B_l, należąc do V_m, należą tem samym do V, wobec czego odcinek B_kB_l nie może przekraczać średnicy wielokąta V. Zastępując B_kB_l odcinkiem przystającym A_kA_l, otrzymujemy wzór

(4) $A_kA_l \leqslant \sigma(V)$, gdzie k i l są to dwie różne liczby naturalne, zawarte między 0 i n.

Wobec jawnej sprzeczności między (3) i (4) musimy odrzucić przypuszczenie (1) i uznać twierdzenie za udowodnione.

Twierdzenie 5 można uogólnić, zastępując warunek: „W jest wielokątem *wypukłym*" warunkiem: „W jest wielokątem *spójnym*" (t.zn. wielokątem takim, że dwa dowolne jego punkty dają się połączyć łamaną, której wszystkie punkty należą do tego wielokąta). Dowód uogólnionego twierdzenia, wymagający nieznacznej modyfikacji w dowodzie pierwotnym, pozostawiamy Czytelnikowi.

Operując definicją stopnia równoważności oraz powyżej podanymi własnościami tego pojęcia, można przystąpić do badania stopnia równoważności w odniesieniu do różnych konkretnych par wielokątów równoważnych. Naogół potrafimy dla stopnia równoważności każdej poszczególnej pary wielokątów podać jedynie pewne ograniczenia z góry i z dołu.

Ograniczenia z *góry* uzyskujemy natychmiast w tych przypadkach, gdy mamy rysunek, ustalający równoważność wielokątów W i V przez rozkład na części odpowiednio przystające: jeżeli w każdym z nich liczba części jest n, to na mocy definicji stopnia równoważności będziemy mieli

$$\delta(W,V) \leqslant n.$$

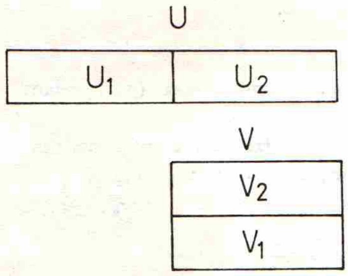
Ponadto przy ustalaniu ograniczenia z góry możemy niekiedy posiłkować się własnościami 3 i 4.

Jeśli chodzi o ograniczenia z *dołu*, mamy tu przedewszystkiem trywjalne ograniczenie: $\delta(W,V) \geqslant 2$, które na mocy własności 2 zachodzi dla dowolnej pary wielokątów W i V równoważnych, ale nie przystających. Znacznie trudniej jest uzyskać mocniejsze ograniczenia z dołu; mamy tu narazie do dyspozycji tylko własność 5.

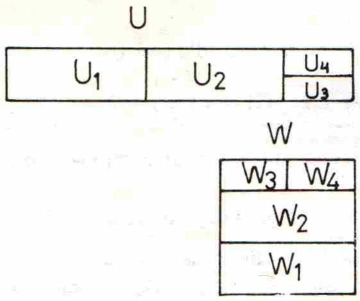
W niektórych tylko przypadkach udało się uzyskać ograniczenie z dołu, pokrywające się z ograniczeniem z góry, przez to samo — wyznaczyć dokładnie stopień równoważności wielokątów.

Podamy tu kilka przykładów.

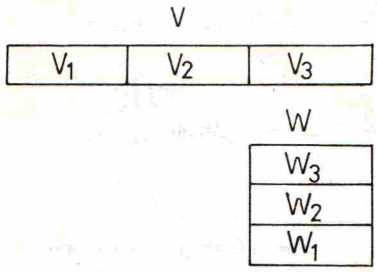
A. Niech W i V będą to odpowiednio kwadrat i prostokąt z rys. 1 lub 2. Rys. 1 daje: $\delta(W,V) \leqslant 5$, natomiast z rys. 2 otrzymujemy mocniejsze ograniczenie: $(W,V) \leqslant 3$. Na mocy własności 2 mamy: $\delta(W,V) \geqslant 2$; własność 5 w tym przypadku lepszego ograniczenia nie daje. Ostatecznie więc $2 \leqslant \delta(W,V) \leqslant 3$. Kwestia, która z liczb 2 i 3 jest wartością $\delta(W,V)$, pozostaje otwarta.



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

B. Niech V będzie prostokątem o bokach $\frac{5}{4}a$ i $\frac{1}{5}a$ (jak w poprzednim przykładzie), a U — prostokątem o bokach $\frac{5}{2}a$ i $\frac{2}{5}a$. Rys. 5 daje: $\delta(U,V) \leqslant 2$. Ponieważ z drugiej strony na mocy własności 2 (lub 5) mamy: $\delta(U,V) \geqslant 2$, więc ostatecznie otrzymujemy: $\delta(U,V) = 2$.

C. Niech W,V,U będą to figury, opisane w przykładach A i B. Na mocy własności 4 mamy:

$$\delta(W,U) \leqslant \delta(W,V) \cdot \delta(U,V);$$

jak okazaliśmy w A i B, $\delta(W,V) \leqslant 3$, a $\delta(U,V) = 2$; zatem $\delta(W,U) \leqslant 6$. W tym jednak przypadku zamiast stosowania własności 4 lepiej jest oprzeć się bezpośrednio na rys. 6, który daje: $\delta(W,U) \leqslant 4$.

Z uwagi na własność 2 mamy ostatecznie: $2 \leqslant \delta(W,U) \leqslant 4$. Kwestia wyznaczenia dokładnej wartości $\delta(W,U)$ znowu zostaje otwarta.

D. Niech W będzie kwadratem o boku a, V — prostokątem o bokach $3a$ i $\frac{1}{3}a$.

Z rys. 7 widać, że $\delta(W,V) \leqslant 3$. Z drugiej strony, stosując własność 5, otrzymujemy:

$$\delta(W,V) \geqslant \frac{\sigma(V)}{\sigma(W)}$$

Jak łatwo widzieć, średnicami prostokątów są ich przekątne; wobec tego: $\sigma(V) = \sqrt{\frac{82}{9}} \cdot a$, $\sigma(W) = \sqrt{2} \cdot a$, a zatem $\delta(W,V) \geqslant \sqrt{\frac{41}{9}} > 2$.

Ponieważ $\delta(W,V)$ jest liczbą naturalną, więc nierówność: $\delta(W,V) > 2$ zastąpić można nierównością: $\delta(W,V) \geqslant 3$. Ograniczenia zgóry i zdołu pokrywają się, wobec czego mamy: $(W,V) = 3$.

Na tych przykładach poprzestajemy.

Nawiązując do pierwszego zdania w niniejszym artykule, powtarzamy raz jeszcze, że w tym dziale geometrji elementarnej niemal wszystko pozostaje jeszcze do zrobienia. Nasuwa się tu cały szereg wdzięcznych tematów do opracowania, z pośród których wysuniemy następujący.

Niech Q będzie kwadratem o boku a, P zaś — prostokątem o bokach $x \cdot a$ i $\frac{1}{x} \cdot a$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą *dodatnią*. Wielokąty Q i P są oczywiście równoważne. Jak łatwo się zorientować, stopień ich równoważności jest funkcją x; będziemy go oznaczali symbolem „$\tau(x)$", kładziemy zatem:

$$\delta(Q,P) = \tau(x).$$

Tematem, którego opracowanie gorąco polecalibyśmy, byłoby dokładne zbadanie funkcji $\tau(x)$. Niektóre ze znanych nam własności podamy w następujących twierdzeniach.

I. *Funkcja $\tau(x)$ jest określona dla wszelkich liczb dodatnich i jako wartości przybiera wyłącznie liczby całkowite dodatnie.*

II. $\tau(x) = \tau\left(\frac{1}{x}\right)$ *dla dowolnego* $x > 0$.

Są to bezpośrednie konsekwencje definicji funkcji $\tau(x)$ oraz definicji stopnia równoważności. Oznaczając symbolem „$E(x)$" najmniejszą liczbę całkowitą n niemniejszą od danej liczby rzyczywistej x (a zatem sprawdzającą wzór: $n-1 < x \leqslant n$), mamy dalej:

III. $\tau(x) \leqslant E(\sqrt{x^2-1})+2$ dla dowolnego $x \geqslant 1$.

Dowodu powyższego twierdzenia nie będziemy przytaczali; zaznaczymy jedynie, że dowód ten można uzyskać, analizując dowody dwóch znanych twierdzeń z teorii równoważności wielokątów, a mianowicie 1) twierdzenie o równoważności dwóch równoległoboków, których podstawy i wysokości odpowiednio przystają. 2) twierdzenia, w myśl którego kwadrat, zbudowany na przyprostokątnej dowolnego trójkąta prostokątnego jest równoważny prostokątowi, zbudowanemu z przeciwprostokątnej oraz z rzutu rozważanej przyprostokątnej na przeciwprostokątną[2]).

Proponujemy Czytelnikowi podanie dokładnego dowodu omawianego twierdzenia lub przynajmniej kilku jego szczególnych przypadków, jak

$$\tau\left(1\frac{1}{3}\right) \leqslant 3,\ \tau\left(2\frac{1}{4}\right) \leqslant 4,\ \tau\left(\sqrt{10}\right) \leqslant 5.$$

Twierdzenie III ustala pewne ograniczenie górne dla funkcji $\tau(x)$. W tych przypadkach, gdy x jest liczbą wymierną, dają się uzyskać inne, częstokroć mocniejsze ograniczenia dla rozważanej funkcji, przyczem — w przeciwstawieniu do twierdzenia III — przy ustalaniu tych ograniczeń nie trzeba się uciekać do podziału prostokątów na figury, nie będące prostokątami. Pomijając tu przypadek ogólny, podamy następujące łatwe twierdzenie:

IV. $\tau(n) \leqslant n$ *dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej* n.

Wynika to z następującej uwagi: kwadrat o boku a można podzielić na n przystających prostokątów o bokach a i $\frac{1}{n} \cdot a$, z których następnie daje się ułożyć prostokąt o bokach $n \cdot a$ i $\frac{1}{n} \cdot a$ (por. rys. 7 dla $n = 3$).

[2]) Por. dowody obu tych twierdzeń w podręczniku Wł. Wojtowicza. Zarys geometrii elementarnej, wyd. VI, § 177 oraz §§ 191 i 192 (przez analizę dowodu drugiego z tych twierdzeń uzyskaliśmy podany powyżej rys. 2).

V. $\tau(x) \geqslant \sqrt{\frac{x^4+1}{2x^2}}$ *dla dowolnego* $x > 0$.

Łatwy dowód tego twierdzenia opiera się na własności 5 stopnia równoważności (por. podany powyżej przykład D).

Ograniczenia dolnego dla funkcji $\tau(x)$, ustalonego w ostatnim twierdzeniu, nie potrafimy dotąd w istotnej mierze wzmocnić. Pewne wzmocnienie, pozbawione jednak większego znaczenia przedstawia następujący wzór, który podamy tu bez dowodu

$$\tau(x) \geqslant \sqrt{\frac{x^4}{2x^2-1}} \quad dla \quad x \geqslant 1.$$

Jako bezpośredni wniosek z twierdzenia V zanotujemy wreszcie:

VI. $\tau(x) \to +\infty$ *gdy* $x \to +\infty$.

Przy pomocy powyższych twierdzeń możemy obliczyć wartości funkcji $\tau(x)$ dla pewnych, nielicznych zresztą wartości argumentu. Tak więc mamy: $\tau(1) = 1$, $\tau(2) = \tau\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ i $\tau(3) = \tau\left(\frac{1}{3}\right) = 3$ (jeśli chodzi o ten ostatni wzór, por. przykład D). Nieco inną metodą można wykazać, że $\tau(4) = \tau\left(\frac{1}{4}\right) = 4$; uzasadnienie tego wzoru pozostawiamy Czytelnikom.

Natomiast ustalenie wartości funkcji $\tau(x)$ dla innych wartości x, i to nawet dla wartości całkowitych ($x \geqslant 5$), wciąż jeszcze nastręcza trudności. W szczególności nie potrafimy dotąd udowodnić następującego twierdzenia, które wydaje się nader prawdopodobne:

$\tau(n) = n$ *dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej* n.

Jako inny przykład nieudowodnionego dotąd a prawdopodobnego twierdzenia przytoczymy następujące zdanie:

$\tau(x) \geqslant 3$ *dla dowolnego* x *dodatniego, różnego od* $\frac{1}{2}$, 1 *i* 2.

Zdanie to w zestawieniu z twierdzeniem III pozwoliłoby obliczyć wartości funkcji $\tau(x)$ dla nieskończenie wielu wartości argumentu, mielibyśmy bowiem: $\tau(x) = 3$ dla każdego x, sprawdzającego nierówności: $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ i $x \neq 1$.

Z uwag powyższych wynika jasno, że od dokładnej znajomości przebiegu funkcji $\tau(x)$ jesteśmy w chwili obecnej bardzo jeszcze dalecy.

Redakcja zachęca Czytelników do nadsyłania wyników dalszych rozważań na tematy, poruszone w powyższym artykule.

Wybrane zadania

Zadania związane z artykułem w tekście

(Nr 169). [...] Udowodnić następujące twierdzenie: Na to, by z kwadratu o boku a można było wyciąć prostokąt o bokach b i d, potrzeba i wystarcza, by było bądź $b \leqslant a$ i $c \leqslant a$, bądź też $b+c \leqslant \sqrt{2}a$. (A. Tarski, Warszawa).

(Nr 170). [...] Zastosować poprzednie twierdzenie do dowodu wzoru

$$\tau(4) = 4.$$

(A. Tarski, Warszawa).

Zadanie maturalne (Województwo Śląskie, gimn. mat. 1928):

Na bilardzie prostokątnym $ABCD$ ($AB = a$, $BC = b$) leżą dwie kule: jedna w środku bilardu, druga w odległości p od brzegu AB i w odległości q od brzegu BC. Druga kula zostaje uderzona tak, że odbiwszy się pod kątem α od brzegu AB, a następnie odbiwszy się kolejno od brzegów AD, DC, CB trafia wreszcie w pierwszą kulę. Dowieść, że

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5a-2q}{3b+2p}.$$

Obliczyć pole, jakie wycina elipsa $16x^2+25y^2 = 1600$ z paraboli $y^2 = 24x$.

Zadania rozrywkowe

(Nr 66). Cyfry maskowane. Mamy oryginalne dzielenie: TRZYZERO:ZERO = ZERO

Każda litera oznacza jakąś cyfrę, przyczem różne litery oznaczają różne cyfry. Prosimy odcyfrować podany zapis, to znaczy wykryć, jakie cyfry są oznaczone poszczególnymi literami. (A. M. Rusiecki).

(Nr 178). Jak ojciec obdarował dzieci? Ojciec rozdał synom 12 obsadek i 18 ołówków, a córkom rozdał 30 obsadek i 20 ołówków; potem jeszcze rozdał wszystkim swym dzieciom 144 stalówki i 120 zeszytów, ale okazało się, że dla jednego z synów nie wystarczyło zeszytu, więc zamiast zeszytu otrzymał zbywającą stalówkę. Ilu było synów i ile córek? (S. Banach, W. Sierpiński, W. Stożek).

Zadanie fizykalne

(Nr 15). Ołowiana kula spadła na ziemię z wysokości 100 m. Obliczyć, jaki % nabytej energii kinetycznej został w ołowiu, jeśli wiadomo, że temperatura jego podniosła się o 5°.

Rozwiązanie zadania F 16

W zadaniu rozważamy reakcję: $\pi + p \to N + k \cdot \pi$ gdzie π, p, N są symbolami pionu, protonu i nukleonu, natomiast k oznacza maksymalną liczbę pionów, jaką można wytworzyć przy ustalonej energii nadlatującego pionu.

W zderzeniach cząstek elementarnych obowiązują pewne zasady zachowania. Zasada zachowania energii i pędu jest Wam doskonale znana. Innymi wielkościami ściśle zachowywanymi w zderzeniach są między innymi liczba barionowa B oraz ładunek elektryczny. Barionami ($B = 1$) są na przykład proton i neutron, natomiast dla pionów liczba barionowa równa się zero.

W rozważanej reakcji liczba barionowa jest zachowana, bowiem równa się 1 przed i po reakcji. Również zasada zachowania ładunku nie narzuca żadnych ograniczeń przy rozwiązywaniu postawionego problemu, ponieważ piony występują w trzech stanach ładunkowych (+, 0, −). Ograniczenia liczby produkowanych cząstek wynikają więc jedynie z zasad zachowania energii i pędu.

Oczywiście obie te zasady muszą być spełnione jednocześnie.

Przebieg reakcji możemy analizować w różnych układach odniesienia. Najbardziej naturalnym jest dla nas układ bezpośrednio związany z nami, obserwatorami, czyli tzw. układ laboratorium.

Jednakże postawiony problem bynajmniej nie rozwiązuje się najprościej w takim układzie odniesienia. Mianowicie nie można całej energii cząstek przed reakcją zamienić tylko w masy spoczynkowe produkowanych cząstek. Nadlatujący pion posiada pewien pęd i taki sam wypadkowy pęd muszą posiadać cząstki po reakcji. Ale jak rozłożyć ten pęd pomiędzy tyle cząstek wtórnych (16 lub więcej), aby jak najmniej energii początkowej zamieniło się w energię kinetyczną powstałych cząstek, a jak najwięcej w ich masy spoczynkowe?

A może łatwiej rozwiązać zagadnienie posługując się innym układem odniesienia. Zastanówcie się. Rozwiązanie zadania kontynuujemy na str. 14