XXV Olimpiada Matematyczna, czyli Turniej Mózgów widziany oczyma uczestnika

Piotr SYRYCZYŃSKI

Stając przed rokiem w szranki Olimpiady Matematycznej obawiałem się spotkania z dostojnym areopagiem brodatych starców, którzy wnikliwie zanalizują moje zdolności i wiadomości. Dużym więc zaskoczeniem było dla mnie spotkanie wśród nich olimpijczyków sprzed 15, 10 czy zaledwie 8 lat — tych co „przecierali szlaki". Stanowią oni trzon obecnych komitetów. Znając na wylot wszystkie ciekawe zadania potrafią wymyślać takie, od których jeżą się włosy na głowie.

Pierwszy etap zmagań okazał się przyjemny dla osób lubiących spokój i stateczny tryb życia. Otóż polegał on na rozwiązywaniu zadań przysyłanych co miesiąc do szkół. Start nastąpił 1 października. Łącznie w trzech rzutach oddano do naszej dyspozycji 12 zadań. Każdy uczeń mógł pracować nad nimi tam, gdzie było mu wygodnie. Ich pisemne rozwiązania przesyłał do swoich Komitetów Okręgowych stając się w tym momencie autentycznym uczestnikiem Olimpiady.

Szybko przeleciały ferie zimowe w oczekiwaniu na wyniki. Uff! Nadszedł upragniony list kwalifikujący do zawodów okręgowych. Ich miejscem były niektóre ośrodki akademickie. Podczas dwóch dni zawodów naszym celem było rozwiązanie sześciu zadań zaproponowanych przez Komitet Główny. Odbywało się to wszystko „w warunkach kontrolowanej samodzielności" — jak brzmi § 16 regulaminu! Jedyną pomocą mogła nam służyć roznoszona herbata oraz smaczne, dietetyczne kanapeczki.

Drugiego dnia wieczorem, po zakończeniu zawodów, odbyła się tradycyjna herbatka połączona z pączkami i analizą rozwiązanych (lub nie) zadań. Wśród nich najmocniej utkwił mi w pamięci problem rozmnażającego się przez podział czworokąta.

Uczestnicy, którzy rozwiązali zadania wystarczająco dobrze, zostali o tym powiadomieni już nie listem, ale pismem. Charakteryzowała je podwójna liczba podpisów i pieczęci. Jego posiadacze mają wolny wstęp na studia matematyczne. W przypadku ubiegania się o przyjęcie na inny kierunek studiów są zwolnieni z egzaminu z matematyki. Pismo to uprawniało do udziału w następnym, ostatnim etapie.

Zawody III stopnia (ogólnopolskie) odbywały się w końcu kwietnia w Warszawie. Olimpijczycy zjawiali się ponurzy i markotni lub kryjący swą tremę nerwową wesołością. Jednym z najspokojniejszych był kolega, który dobrnął na miejsce z ciężko chorą nogą.

Dwudniowe zmagania zakończyły się znaną już „herbatką". Najwięcej zaciętych dyskusji wywołało zadanie z pułapką o rozmiarach dołu na hipopotama. Wpadł w nią też autor niniejszego artykułu.

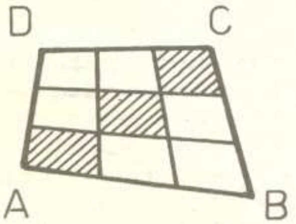
Ci, którzy najlepiej przebrnęli przez wszystkie trudności, spotkali się w początkach czerwca na uroczystym rozdaniu nagród. Medalami Komisji Edukacji Narodowej uhonorowani zostali zasłużeni działacze Olimpiady. Nam, zwycięzcom ubiegłorocznej, XXV Olimpiady, wręczono dyplomy laureatów oraz nagrody książkowe. Nie dla wszystkich był to koniec pracy. Ósemka uczniów wzięła udział w odbywającej się w lipcu Międzynarodowej Olimpiadzie Matematycznej w Erfurcie (NRD).

Po czerwcowym zakończeniu XXV Olimpiady okazało się, że dała ona najwięcej satysfakcji tym, którzy traktowali ją jako piękną i pasjonującą próbę swych sił.

Zadania — tak jak zwykle — nie były łatwe. W porównaniu z poprzednimi wymagały nieco mniej pracy. Musiała być ona oczywiście połączona z intensywnym wysiłkiem myślowym. Mnie osobiście Olimpiada i jej zadania sprawiły dużo przyjemności i zadowolenia.

Zadanie 4. (zawody stopnia II)

W czworokącie wypukłym $ABCD$ o polu S każdy z boków podzielono na 3 równe części i poprowadzono odcinki łączące odpowiednie punkty podziału przeciwległych boków w ten sposób, że czworokąt został podzielony na 9 czworokątów. Dowieść, że suma pól trzech czworokątów powstałych z podziału — zawierającego wierzchołek A, środkowego i zawierającego wierzchołek C — równa się $S/3$.



Zadanie 1. (zawody stopnia III)

W czworościanie $ABCD$ bok $\overline{AB}$ jest prostopadły do boku $\overline{CD}$ i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Udowodnić, że płaszczyzna wyznaczona przez krawędź $\overline{AB}$ i środek krawędzi $\overline{CD}$ jest prostopadła do krawędzi CD.

Gry — rozwiązanie.

Naśladując rozumowanie przeprowadzone w tekście stwierdzimy, że macierz wypłat dla tak zmodyfikowanej gry jest, po wykreśleniu strategii zdominowanych (nieopłacalnych), następująca:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} O & B \end{array} \\ \begin{array}{c} O \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4}b \\ \frac{1}{4}(8-b) & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Fakt, że graczowi I nie opłaca się blefować, oznacza dokładnie tyle, że w rozwiązaniu gry u gracza I nie wystąpi strategia B; strategia ostrożna tego gracza jest zatem dominująca. A to ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{4}\ (8-b) \leqslant 0$, czyli $b \geqslant 8$. Przy tak dużym b blefując ryzykuje się za duże straty co czyni blef nieopłacalnym, a grę — nieciekawą.

Rozwiązanie — klocek

Jak to pokazuje rysunek, cięliśmy trzy razy w płaszczyznach wzajemnie prostopadłych tak, aby kolejne cięcie nie przecinało śladu przecięć poprzednich.
Nie jest to jedyne rozwiązanie.