Mgr Tadeusz B. IWIŃSKI

Czy i jak często warto blefować? To pytanie postawiliśmy i pozostawiliśmy bez odpowiedzi w poprzednim odcinku „Sztuki wygrywania" («Delta», 1974, 10). Każdy, kto zetknął się z jakąkolwiek grą, w której blef jest dopuszczalną strategią (a życie samo jest jedną z takich gier), wie dobrze, że warto — ba, czasem nawet trzeba — trochę poblefować. Byle nie za często. Czy można tu podać jakieś zasady?

Rozważmy następującą prostą grę dwuosobową. Dysponujemy talią, w której są tylko dwa rodzaje kart: „Wysokie" (W) i „niskie" (N). Każdy z graczy wchodzi do gry wpłacając do puli po 8 j.r. (jednostek rozliczeniowych) i otrzymuje po jednej karcie, która staje się jego „ręką". „Rozdaniem" nazywamy więc parę kart; mogą się przy tym wydarzyć tylko cztery różne rozdania: (W,W), (W,N), (N,W) i (N,N).

Symbol (N,W) oznacza tu rozdanie, w którym pierwszy z graczy otrzymał kartę niską, a drugi — wysoką itd. Jeśli przyjąć, że kart w talii jest dużo, a liczba kart niskich — równa liczbie kart wysokich, to wszystkie rozdania będą jednakowo prawdopodobne; każde z nich będzie występowało przeciętnie raz na cztery gry.

Po rozdaniu kart gracz I ma dwie możliwości: może albo „sprawdzić", albo „podnieść". Sprawdzenie polega na porównaniu obu „rąk" — posiadacz wyższej karty wygrywa całą pulę; jeśli obie karty są jednakowe, to gracze dzielą się pulą po połowie. Jeśli I zdecyduje się podnieść, to wpłaca do puli 4 j.r. W tym przypadku wkracza gracz II. Może on albo zrezygnować (wtedy gracz I bierze wszystko, co jest w puli bez pokazywania ręki), albo sprawdzić dokładając uprzednio do puli 4 j.r. I to są wszystkie reguły tej gry. Została ona opisana przez znanego teoretyka gier, A. W. Tuckera.

Na to, by móc zanalizować tę grę omawianymi w poprzednich odcinkach metodami, musimy po pierwsze ustalić, jakie są możliwe strategie graczy; po drugie — zobaczyć, jaka jest macierz gry, a następnie znaleźć rozwiązanie (to ostatnie okaże się zresztą najłatwiejsze).

Jakie są możliwe strategie graczy? Jak pamiętamy («Delta», 1974, 6) strategia to nic innego, jak ustalona zasada postępowania we wszystkich mogących się wydarzyć sytuacjach. Jedną z możliwych strategii gracza I jest: „sprawdzaj, jeśli masz w ręku niską kartę, i podnoś, jeśli masz wysoką"; nazwiemy ją krótko „strategią sprawdź–podnieś" (w skrócie S–P). Nietrudno zauważyć, że gracz I dysponuje dokładnie czterema różnymi strategiami; prócz S–P mógłby on jeszcze stosować S–S (= „sprawdzaj niezależnie od tego, co masz w ręku"), P–S oraz P–P.

Rozwiązanie zadania M44.

Dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ liczby $2^n - 1$ są równe odpowiednio 1, 3, 7, 15, 31 i są względnie pierwsze z n. Największy wspólny dzielnik liczb 6 i $2^6 - 1 = 63$ równy jest 3. Dla każdej liczby naturalnej k liczby $6k$ i $2^{6k} - 1$ mają więc wspólny dzielnik (niekoniecznie największy) równy 3, liczba $2^{6k} - 1$ jest bowiem podzielna przez $2^6 - 1$, co wynika z tożsamości

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

zastosowanej dla liczb $a = 2^6$, $b = 1$, $n = k$.

Gracz II, o ile I dopuści go do decydowania o przebiegu gry, też ma do dyspozycji cztery strategie. Jedną z nich jest strategia „rezygnuj, jeśli masz w ręku kartę niską, i sprawdzaj, jeśli masz wysoką"; oznaczymy ją symbolem R–S. Pozostałe strategie gracza II to R–R, S–R oraz S–S.

Zobaczymy, co by się działo, gdyby I systematycznie stosował S–P, a II posługiwał się wyłącznie strategią R–S. W przypadku rozdania (W,W) gracz pierwszy podnosi, a gracz drugi sprawdza, po czym obaj dzielą się po połowie pulą, do której każdy z nich zdążył wpłacić po 12 j.r (po 8 j.r. na początku gry i ponadto: pierwszy 4 j.r. za prawo podniesienia, drugi 4 j.r. za prawo sprawdzenia). W efekcie każdy odbiera tyle, ile wpłacił, i wygrana gracza I wynosi 0 j.r.

W przypadku rozdania (W,N) zastosowanie tej samej pary strategii przynosi graczowi I wygraną 8 (bo I podniesie, a II zrezygnuje, tracąc w ten sposób 8 j.r. wpłaconych na początku). Analogicznie stwierdzimy, że przy rozdaniu (N,W) gracz I przegrywa 8 j.r., bo przyjęta strategia S–P nakazuje mu sprawdzać; przy rozdaniu (N,N) gracz I sprawdza — i odbiera to, co wpłacił.

Jak wspomnieliśmy wyżej, przy dużej liczbie gier każde rozdanie będzie występowało jednakowo często. Zatem gracz I będzie równie często wygrywał 8 j.r. (na rozdaniach (W,N)) co przegrywał tyle samo (na rozdaniach (N,W)). Zatem można oczekiwać, że jego przeciętna wygrana przypadająca na jedną rozgrywkę wyniesie zero. Inaczej mówiąc: oczekiwana wypłata gracza I przy stosowaniu pary strategii S–P i R–S wynosi 0.

Zobaczmy jeszcze, co by się działo, gdyby I systematycznie stosował strategię P–S, a II — strategię R–S. Jeśli wydarzy się rozdanie (W,W) to pierwszy sprawdzi i wycofa z puli swoje 8 j.r. Przy rozdaniu (W,N) też sprawdzi i wygra 8. Przy rozdaniu (N,W) pierwszy podniesie, drugi sprawdzi — i pierwszy przegra 12 j.r. Przy rozdaniu (N,N) pierwszy podniesie, drugi zrezygnuje, co da pierwszemu wygraną 8. Ponieważ zaś każde rozdanie zdarza się przeciętnie raz na cztery gry, to przy dużej liczbie gier gracz I może oczekiwać, że średnio na jedną grę wypadnie mu wypłata:

$$\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 8+\frac{1}{4}(-12)+\frac{1}{4}\cdot 8=1,$$

a więc może oczekiwać średnio z jednej gry wygranej 1 j.r.

$$\begin{array}{c|cccc} & \text{R-R} & \text{R-S} & \text{S-R} & \text{S-S} \\ \hline \text{S-S} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{S-P} & 2 & 0 & 3 & 1 \\ \text{P-S} & 6 & 1 & 4 & -1 \\ \text{P-P} & 8 & 1 & 7 & 0 \end{array}$$

W analogiczny sposób możemy określić (z punktu widzenia gracza I) oczekiwane wypłaty dla pozostałych par strategii. Otrzymamy macierz wypłat podaną obok. Zauważmy, że graczowi I nie opłaca się nigdy stosować strategii P–S, bowiem strategia ta jest zdominowana przez strategię P–P, która daje zawsze niegorsze, a czasem lepsze rezultaty, niezależnie od tego, jaką strategię zastosuje gracz II. Gracz I może więc w ogóle nie brać pod uwagę strategii P–S.

$$\begin{array}{c|cc} & \text{R-S} & \text{S-S} \\ \hline \text{S-S} & 0 & 0 \\ \text{S-P} & 0 & 1 \\ \text{P-P} & 1 & 0 \end{array}$$

Rozsądny gracz II z analogicznych względów nigdy nie zastosuje strategii R–R, przynosi mu ona bowiem zawsze nie mniejsze (a czasem większe) straty niż strategia R–S; z tych samych powodów nigdy nie zastosuje on strategii S–R. Obaj o tym wiedzą i wobec tego obaj biorą pod uwagę tylko strategie nie odrzucone — którym odpowiada podana obok macierz wypłat. Ale w tej sytuacji gracz I zrezygnuje również ze stosowania strategii S–S, która jest dla niego mniej korzystna niż każda z pozostałych. Okazuje się więc, że w rzeczywistości będą gracze rozgrywali grę, w której pierwszy dysponuje tylko strategiami S–P i P–P, a drugi tylko R–S i S–S.

Strategia P–P jest najwyraźniej strategią blefową: „podnoś zawsze niezależnie od tego, co masz w ręku". Również w strategii S–S drugiego gracza (sprawdzaj zawsze, mimo że może cię to kosztować) kryje się element blefu. Strategie te nazwiemy blefowymi. Z analogicznych względów strategie S–P i R–S można nazwać ostrożnymi.

Zauważmy: na początku podaliśmy reguły pewnej gry. Założyliśmy, że gracze są ludźmi rozsądnymi i że grę tę rozgrywają między sobą wiele razy. Z reguł gry i tych założeń wywnioskowaliśmy, że powinni oni rozgrywać grę następującą

$$\begin{array}{c|cc} & \text{Ostr.} & \text{Blef} \\ \hline \text{Ostr.} & 0 & 1 \\ \text{Blef} & 1 & 0 \end{array},$$

Por. „Krótki kurs gier 2×2", «Delta», 1974, 10.

a więc grę 2×2 o bardzo prostej macierzy wypłat. Z łatwością stwierdzamy, że gra ta nie posiada pary strategii czystych w równowadze, a rozwiązanie jej stanowi para strategii mieszanych: każdy z graczy powinien wykorzystywać strategię ostrożną i strategię blefową z częstością 1/2. Przez zastosowanie strategii mieszanej (1/2, 1/2) gracz I zapewnia sobie to, że w dużej liczbie gier będzie wygrywał przeciętnie nie mniej niż 1/2 j.r. na jedną grę, a gracz II — że nie będzie przegrywał przeciętnie więcej niż 1/2 j.r. na jedną grę. Zauważmy przy tym, że realizacja strategii (1/2, 1/2) przez gracza I oznacza stosowanie przez niego następującej reguły: „jeśli masz rękę wysoką — zawsze podnoś; jeśli masz rękę niską — w połowie przypadków podnoś, a w połowie sprawdzaj".

Wykazaliśmy przy okazji, że reguły gry faworyzują gracza I. Grę — jeśli jest rozgrywana wielokrotnie — można uczynić sprawiedliwą przyjmując dodatkową regułę, że po każdej grze gracze zamieniają się rolami.

Uzyskaliśmy przy okazji odpowiedź na pytanie postawione na wstępie: są takie sytuacje, w których nie tylko można, ale powinno się blefować — i to z określoną częstością. Jak twierdzi J. Kemeny, amerykański filozof i matematyk, jest to jeden z najbardziej interesujących wyników uzyskanych w teorii gier.

Zadanie. Załóżmy, że przy nie zmienionej wpłacie początkowej (8 j.r.) wpłaty za podniesienie (gracz I) i sprawdzenie (gracz II) wynoszą b j.r. Przy jakich b graczowi I nie opłaca się blefować? (Rozwiązanie na str. 8).