Prawo wielkich liczb cz. II

Dr Wiesław SZLENK

W poprzednim artykule omówiliśmy sens prawa wielkich liczb. Teraz pokażemy, jak można praktycznie je wykorzystywać.

Przypomnijmy treść prawa wielkich liczb. Niech A będzie możliwym rezultatem pewnego doświadczenia $\mathscr{D}$, niech p będzie prawdopodobieństwem, że w doświadczeniu $\mathscr{D}$ zajdzie wynik A $\left(\text{np. } \mathscr{D} \text{ — rzut monetą, } A \text{ — „orzeł”, } p = \frac{1}{2}\right)$.

Doświadczenie $\mathscr{D}$ powtarzamy niezależnie n razy. Niech S_n oznacza liczbę tych powtórzeń doświadczenia $\mathscr{D}$, w których otrzymaliśmy wynik A. Wówczas dla każdej liczby $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Praktycznie można ten wynik interpretować następująco: dla dużych liczb n prawie na pewno (tj. ze znikomo małą szansą popełnienia omyłki) możemy twierdzić, że $\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon$; inaczej mówiąc $\frac{S_n}{n} \approx p$ z dokładnością do ε.

Do roku 1965 w USA zabiegi przerywania ciąży były prawnie zabronione. Oczywiście pewni lekarze robili je po kryjomu, ale nie było wiadomo, na jaką skalę. Socjologowie postanowili to zbadać. Zwykły sposób zadawania pytań osobom losowo wybranym nie dałby żadnych wiarygodnych informacji. Pytanie „Czy Pani poddawała się zabiegowi przerywania ciąży?” wkracza bardzo brutalnie w sferę spraw intymnych i poza tym w danym przypadku dotyczy spraw będących w kolizji z prawem. Wybrane losowo kobiety w najlepszym razie nie odpowiedziałyby na to pytanie lub odpowiedziałyby nieprawdę.

Tu w sukurs socjologom przyszli matematycy. Zaproponowali metodę, którą można by przedstawić następująco:

Losowo wybranym kobietom wręczano dwukolorową kostkę (cztery ściany białe i dwie czarne) oraz monetę. Polecenie brzmiało: rzucić kostką i monetą; jeżeli wypadnie kolor biały, odpowiedzieć TAK lub NIE na pytanie dotyczące zabiegu (niezależnie od tego, co wypadło w rzucie monetą); jeżeli wypadnie kolor czarny, to odpowiedzieć TAK lub NIE na pytanie „Czy wypadł orzeł?”. Zakłada się, że cały eksperyment odbywa się bez świadków. W rezultacie testowana osoba odpowiada tylko TAK lub NIE, ale na które pytanie odpowiada (tzn. czy na pytanie o zabieg, czy na pytanie o „orła”), wie ona i tylko ona. Lecz dla celów statystyki to wystarcza.

Przypuśćmy, że w wyniku badań opisaną wyżej metodą otrzymaliśmy n odpowiedzi TAK i m odpowiedzi NIE. Niech A będzie zdarzeniem, że wypadł kolor czarny przy rzucie kostką i orzeł przy rzucie monetą. Doświadczenie (polegające na rzucie kostką i monetą) powtórzyliśmy $n+m$ razy. Obliczmy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A: kolor czarny wypada 2 razy na 3 rzuty, orzeł 1 raz na 2 rzuty, łącznie wynik A zdarza się średnio raz na sześć prób. Stąd $P(A) = \frac{1}{6}$.

Niech S_{n+m} oznacza liczbę tych prób, które dały wynik A. Stąd na mocy prawa wielkich liczb mamy:

$$\frac{S_{n+m}}{n+m} \approx \frac{1}{6}.$$

A więc liczba odpowiedzi TAK na pytanie o wypadnięcie orła wynosi z dobrym przybliżeniem $\frac{1}{6}(n+m)$. Analogicznie liczba odpowiedzi NIE na to pytanie wynosi też $\frac{1}{6}(n+m)$ (z tym samym przybliżeniem). Liczba kobiet odpowiadających na pytanie o dokonywaniu zabiegu wynosi $\frac{2}{3}(n+m)$, stąd liczba

$$\frac{n - \frac{1}{6}(n+m)}{\frac{2}{3}(n+m)} = \frac{5n-m}{4(n+m)}$$

wyraża stosunek liczby kobiet, które odpowiedziały TAK na pytanie o zabieg, do liczby wszystkich kobiet, którym los i prowadzący badania zadał to pytanie. W ten sposób z dowolną dokładnością i z dowolnie małą szansą pomyłki (jeśli brać duże $n+m$) możemy wyznaczyć procent kobiet, które poddawały się zabiegowi przerywania ciąży. Co ciekawsze, nie możemy wskazać na pewno ani jednej osoby, która się temu zabiegowi poddała.
Opisane powyżej badanie przeprowadzono w USA w początku lat sześćdziesiątych. Wyniki i cały pomysł były referowane na kongresie statystyki w Londynie w roku 1965. Oczywiście techniczna realizacja była nieco inna — wręczanie kostki i monety byłoby zbyt kłopotliwe. Ale idea była taka, jak opisano powyżej.
I jeszcze jedna ciekawostka związana z prawem wielkich liczb. Pierwsze systematyczne obserwacje płci noworodków były przeprowadzone we Francji w latach 1800, 1801, 1802 z inicjatywy francuskiego matematyka S. Poissona. Okazało się, że stosunek liczby noworodków płci męskiej do liczby noworodków płci żeńskiej wynosił 22:21. Tylko Paryż wykazywał odchylenie od tej normy, a mianowicie dla Paryża stosunek ten wynosił 24:23. Różnica była zbyt znaczna w stosunku do liczby urodzonych dzieci, aby to mógł być przypadek. Sprawa zaciekawiła szersze grono ludzi. Pobieżne obserwacje w krajach sąsiednich, a nawet wśród tubylczej ludności Ameryki Południowej (dokonane przez W. Humboldta) wykazywały wyniki bliskie 22:21. Wymyślano różne teorie, od bardziej rozsądnych do całkowicie bezsensownych, jak np. że jest to wynik rozwiązłego życia paryżan. Wreszcie Poisson wpadł na właściwe rozwiązanie: wyłączył ze statystyki przytułki Paryża. I wtedy proporcja spadła natychmiast do 22:21. Co z tego wynikało? Otóż to, że okoliczna ludność (a może i nie tylko okoliczna) podrzucała noworodki — i to dziewczynki (chłopcy byli widocznie bardziej w cenie) — do Paryża. Zjawisko to było tak masowe, że aż zakłóciło statystykę. Nigdy nie dowiedzielibyśmy się o tym, gdyby nie obserwacje Poissona.

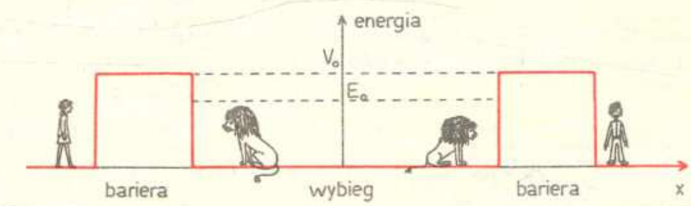
Rozwiązanie zadania M.42
Sprawdzimy najpierw, że 38 nie jest sumą dwóch liczb złożonych nieparzystych. Mogłyby to być liczby 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35. Jeżeli 38 jest sumą dwóch liczb naturalnych, to któraś z nich jest mniejsza od 19. Gdyby 38 było sumą dwóch liczb złożonych nieparzystych, to jedną z nich byłoby 9 lub 15, ale $38-9 = 29$ i $38-15 = 23$ są liczbami pierwszymi.
Każda liczba parzysta $\geqslant 40$ jest jednej z postaci $10k$, $10k+2$, $10k+4$, $10k+6$, $10k+8$, gdzie k jest liczbą całkowitą większą od 4. Zachodzą równości $10k = 15+5(2k-3)$, $10k+2 = 27+5(2k-5)$, $10k+4 = 9+5(2k-1)$, $10k+6 = 21+5(2k-3)$, $10k+8 = 33+5(2k-5)$. Pierwsze składniki są oczywiście liczbami nieparzystymi złożonymi, drugie też są takie, gdyż są iloczynami liczby 5 przez liczbę $\geqslant 2k-5 \geqslant 3$. Udowodniliśmy tutaj nawet więcej, mianowicie że każda liczba parzysta $\geqslant 40$ jest sumą dwóch liczb nieparzystych, z których jedna jest podzielna przez 3, a druga przez 5.

Trochę rachunków

Kwantowy lew, czyli o teorii zjawiska tunelowego

Dr Zbigniew PŁOCHOCKI

W ogrodzie zoologicznym dla kwantowych zwierząt wybieg dla lwów, w postaci długiego pasa, oddziela od publiczności bariera, którą stanowi obszar sztucznie wytworzonego pola grawitacyjnego o dostatecznie dużym i stałym (w tym obszarze) natężeniu. Energia potencjalna, jaką miałby lew w obszarze bariery, gdyby się tam znalazł, jest o V_0 większa (rys. 1) niż na wybiegu (mowa o lwie w normalnej pozycji, na czterech łapach, tak że jego środek masy znajduje się na pewnej wysokości nad ziemią). Maksymalna energia kinetyczna, jaką może mieć rozpędzony lew, wynosi $E_0 < V_0$. Jaką wysokość energetyczną musi mieć bariera (tzn. jaka musi być wartość V_0), aby była ona ogrodzeniem absolutnie bezpiecznym, czyli — aby żaden lew nie mógł jej nigdy przeskoczyć?



Rys. 1. Ogrodzenie w postaci barier potencjału (energię potencjalną lwa na wybiegu przyjęto za poziom odniesienia, któremu przypisano wartość równą zeru)

Gdyby lwy były zwierzętami poruszającymi się zgodnie z prawami mechaniki klasycznej, żaden z nich nie mógłby przeskoczyć bariery. Nasze lwy to jednak zwierzęta kwantowe, wykazujące cechy zarówno korpuskularne, jak i falowe. Ich ruchem rządzą więc prawa mechaniki kwantowej. Przyjmijmy dla prostoty, że każdego lwa można traktować jak cząstkę o masie m. Odpowiednikiem klasycznego równania ruchu cząstki (wyrażającego II zasadę Newtona) jest w mechanice kwantowej równanie Schrödingera. Jego rozwiązaniem jest tak zwana funkcja falowa, opisująca własności cząstek kwantowych w języku teorii fal. Im większą