wyraża stosunek liczby kobiet, które odpowiedziały TAK na pytanie o zabieg, do liczby wszystkich kobiet, którym los i prowadzący badania zadał to pytanie. W ten sposób z dowolną dokładnością i z dowolnie małą szansą pomyłki (jeśli brać duże $n+m$) możemy wyznaczyć procent kobiet, które poddawały się zabiegowi przerywania ciąży. Co ciekawsze, nie możemy wskazać na pewno ani jednej osoby, która się temu zabiegowi poddała.

Opisane powyżej badanie przeprowadzono w USA w początku lat sześćdziesiątych. Wyniki i cały pomysł były referowane na kongresie statystyki w Londynie w roku 1965. Oczywiście techniczna realizacja była nieco inna — wręczanie kostki i monety byłoby zbyt kłopotliwe. Ale idea była taka, jak opisano powyżej.

I jeszcze jedna ciekawostka związana z prawem wielkich liczb. Pierwsze systematyczne obserwacje płci noworodków były przeprowadzone we Francji w latach 1800, 1801, 1802 z inicjatywy francuskiego matematyka S. Poissona. Okazało się, że stosunek liczby noworodków płci męskiej do liczby noworodków płci żeńskiej wynosił 22:21. Tylko Paryż wykazywał odchylenie od tej normy, a mianowicie dla Paryża stosunek ten wynosił 24:23. Różnica była zbyt znaczna w stosunku do liczby urodzonych dzieci, aby to mógł być przypadek. Sprawa zaciekawiła szersze grono ludzi. Pobieżne obserwacje w krajach sąsiednich, a nawet wśród tubylczej ludności Ameryki Południowej (dokonane przez W. Humboldta) wykazywały wyniki bliskie 22:21. Wymyślano różne teorie, od bardziej rozsądnych do całkowicie bezsensownych, jak np. że jest to wynik rozwiązłego życia paryżan. Wreszcie Poisson wpadł na właściwe rozwiązanie: wyłączył ze statystyki przytułki Paryża. I wtedy proporcja spadła natychmiast do 22:21. Co z tego wynikało? Otóż to, że okoliczna ludność (a może i nie tylko okoliczna) podrzucała noworodki — i to dziewczynki (chłopcy byli widocznie bardziej w cenie) — do Paryża. Zjawisko to było tak masowe, że aż zakłóciło statystykę. Nigdy nie dowiedzielibyśmy się o tym, gdyby nie obserwacje Poissona.

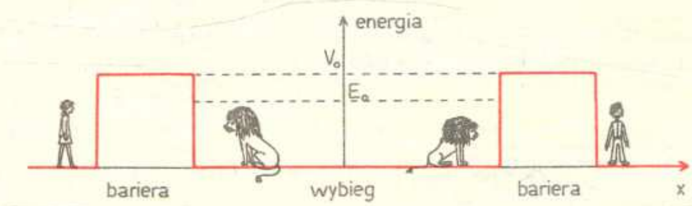
Rozwiązanie zadania M.42
Sprawdzimy najpierw, że 38 nie jest sumą dwóch liczb złożonych nieparzystych. Mogłyby to być liczby 9, 15, 21, 25, 27, 33, 35. Jeżeli 38 jest sumą dwóch liczb naturalnych, to któraś z nich jest mniejsza od 19. Gdyby 38 było sumą dwóch liczb złożonych nieparzystych, to jedną z nich byłoby 9 lub 15, ale $38-9=29$ i $38-15=23$ są liczbami pierwszymi.
Każda liczba parzysta $\geqslant 40$ jest jednej z postaci $10k$, $10k+2$, $10k+4$, $10k+6$, $10k+8$, gdzie k jest liczbą całkowitą większą od 4. Zachodzą równości $10k = 15+5(2k-3)$, $10k+2 = 27+5(2k-5)$, $10k+4 = 9+5(2k-1)$, $10k+6 = 21+5(2k-3)$, $10k+8 = 33+5(2k-5)$. Pierwsze składniki są oczywiście liczbami nieparzystymi złożonymi, drugie też są takie, gdyż są iloczynami liczby 5 przez liczbę $\geqslant 2k-5 \geqslant 3$. Udowodniliśmy tutaj nawet więcej, mianowicie że każda liczba parzysta $\geqslant 40$ jest sumą dwóch liczb nieparzystych, z których jedna jest podzielna przez 3, a druga przez 5.

Trochę rachunków

Kwantowy lew, czyli o teorii zjawiska tunelowego

Dr Zbigniew PŁOCHOCKI

W ogrodzie zoologicznym dla kwantowych zwierząt wybieg dla lwów, w postaci długiego pasa, oddziela od publiczności bariera, którą stanowi obszar sztucznie wytworzonego pola grawitacyjnego o dostatecznie dużym i stałym (w tym obszarze) natężeniu. Energia potencjalna, jaką miałby lew w obszarze bariery, gdyby się tam znalazł, jest o V_0 większa (rys. 1) niż na wybiegu (mowa o lwie w normalnej pozycji, na czterech łapach, tak że jego środek masy znajduje się na pewnej wysokości nad ziemią). Maksymalna energia kinetyczna, jaką może mieć rozpędzony lew, wynosi $E_0 < V_0$. Jaką wysokość energetyczną musi mieć bariera (tzn. jaka musi być wartość V_0), aby była ona ogrodzeniem absolutnie bezpiecznym, czyli — aby żaden lew nie mógł jej nigdy przeskoczyć?

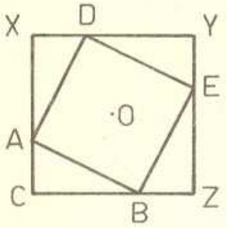


Rys. 1. Ogrodzenie w postaci barier potencjału (energię potencjalną lwa na wybiegu przyjęto za poziom odniesienia, któremu przypisano wartość równą zeru)

Gdyby lwy były zwierzętami poruszającymi się zgodnie z prawami mechaniki klasycznej, żaden z nich nie mógłby przeskoczyć bariery. Nasze lwy to jednak zwierzęta kwantowe, wykazujące cechy zarówno korpuskularne, jak i falowe. Ich ruchem rządzą więc prawa mechaniki kwantowej. Przyjmijmy dla prostoty, że każdego lwa można traktować jak cząstkę o masie m. Odpowiednikiem klasycznego równania ruchu cząstki (wyrażającego II zasadę Newtona) jest w mechanice kwantowej równanie Schrödingera. Jego rozwiązaniem jest tak zwana funkcja falowa, opisująca własności cząstek kwantowych w języku teorii fal. Im większą

Rozwiązanie zadania M.40

Na figurze złożonej z trójkąta i kwadratu opiszemy prostokąt $CXYZ$ (zob. rysunek).



Trójkąty ACB i DXA są przystające, gdyż $\sphericalangle XAD = 180° - (90° + \sphericalangle CAB) = 90° - \sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$, $\sphericalangle AXD = \sphericalangle ACD$, więc $\sphericalangle XDA = \sphericalangle CBA$ oraz $AB = AD$. Podobnie wykazujemy, że trójkąty ACB, EYD i BZE są przystające. Mamy więc $AC = BZ$, $XA = BC$, stąd $CZ = CB + BZ = XA + AC = XC$. Prostokąt jest więc kwadratem. Punkt O jest środkiem symetrii całej narysowanej figury, leży więc na przekątnej CY. Kąt OCB równy jest więc połowie kąta prostego.

wartość (bezwzględną) ma ta funkcja w danym miejscu, tym bardziej prawdopodobne jest znalezienie tam cząstki (dokładniej: gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym miejscu jest wprost proporcjonalna do kwadratu bezwzględnej wartości funkcji falowej w tym miejscu). Funkcja falowa ogólnie zależy i od czasu, i od współrzędnych przestrzennych. Załóżmy dla uproszczenia, że lwy biegają po wybiegu w sposób ustalony, a zatem prawdopodobieństwo spotkania lwa w dowolnym miejscu na wybiegu nie zależy od czasu, ponieważ „okupują" one wybieg w sposób średnio równomierny. Wtedy funkcja falowa będzie iloczynem pewnej funkcji czasu i pewnej funkcji współrzędnych przestrzennych. O rozkładzie przestrzennym prawdopodobieństwa znajdowania się lwa w danym miejscu decydować będzie tylko ta druga funkcja. W dalszym ciągu tylko tą funkcją będziemy się zajmowali (i ją też będziemy nazywali funkcją falową).

Teraz funkcja falowa zależy od dwóch współrzędnych przestrzennych. Aby sobie jeszcze bardziej uprościć zadanie, przyjmijmy, że lwy biegają tylko od jednej bariery do drugiej po prostych prostopadłych do barier (jedną z tych prostych przyjmiemy za oś $0x$). Teraz funkcja falowa zależy tylko od jednej zmiennej. Przy tych wszystkich uproszczeniach pęd lwa opisuje w mechanice klasycznej wielkość: $p = mv$, gdzie v — prędkość lwa; w mechanice kwantowej pęd lwa określa pochodna funkcji falowej;

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi}{dx}.$$

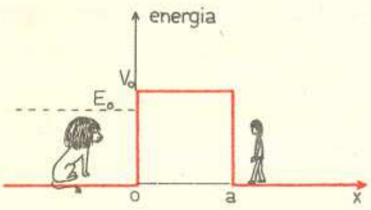
W mechanice klasycznej energia kinetyczna lwa dana jest wzorem $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$; w mechanice kwantowej energię kinetyczną lwa określa wielkość;

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}.$$

Jeśli więc V oznacza energię potencjalną lwa, to zasada zachowania energii w ujęciu kwantowym przyjmie postać:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = E\psi,$$

gdzie E — całkowita energia cząstki. Jest to właśnie równanie Schrödingera. Aby zatem odpowiedzieć na postawione pytanie, wystarczy znaleźć rozwiązanie tego równania dla podanej na rys. 1 zależności $V(x)$, a następnie określić V_0 z warunku, że bezwzględna wartość funkcji falowej poza obszarem bariery jest dokładnie równa zeru (inaczej bariera nie byłaby w 100% bezpieczna dla publiczności). Problem możemy jednak rozwiązać prościej, przyjmując mianowicie, że wybieg rozciąga się w jedną stronę nieskończenie daleko, czyli rozstrzygnąć zagadnienie dla jednej tylko bariery (rys. 2). Kto nie wierzy, niech sam się przekona.

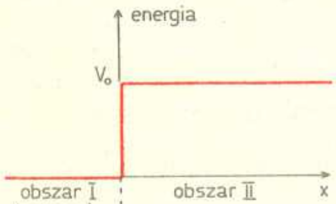


Rys. 2

Jaki uzyskamy wynik? Zapewne Czytelnik będzie wolał sam wykazać, że na to, by bariera była absolutnie bezpieczna dla publiczności, jej wysokość energetyczna V_0 musi być nieskończenie wielka (jeśli ma mieć skończoną szerokość a). Tym, którzy nie wiedzą jeszcze, jak się do tego zabrać, przyda się pewnie kilka wskazówek. W tym celu rozważmy najpierw prosty przypadek — progu potencjalnego (rys. 3), tzn. sytuacji, w której gdyby lew znalazł się poza wybiegiem, miałby wszędzie jednakową energię potencjalną o V_0 większą niż na wybiegu. Ponieważ w obszarze I ($x < 0$) możemy przyjąć $V = 0$ (gdyż interesuje nas jedynie przyrost energii potencjalnej względem energii potencjalnej lwa na wybiegu), a $V = V_0$ w obszarze II, zatem najprościej jest rozwiązać równanie Schrödingera oddzielnie dla każdego obszaru. Przepisujemy więc najpierw to równanie dla obszaru I. Jeśli Czytelnik uważnie przyjrzy się temu równaniu, to zauważy zapewne, że jest ono formalnie identyczne z równaniem ruchu drgającego. Rozwiązaniami podstawowymi równania są więc funkcje trygonometryczne $\sin kx$ i $\cos kx$, gdzie k — pewna stała, którą trzeba wyznaczyć. Znacznie prościej jest rozwiązywać tego rodzaju równania, jeśli funkcje trygonometryczne przedstawimy za pomocą funkcji wykładniczej e^{iy} zmiennej urojonej iy (e — podstawa logarytmów naturalnych), korzystając z relacji:

$$e^{\pm iy} = \cos y \pm i \sin y$$

(stąd wynikają relacje odwrotne: $2\cos y = e^{iy} + e^{-iy}$ oraz $2i\sin y = e^{iy} - e^{-iy}$), gdzie y — zmienna rzeczywista. Teraz możemy powiedzieć, że podstawowymi



Rys. 3

rozwiązaniami naszego równania są funkcje: e^{ikx} oraz e^{-ikx}. Łatwo to sprawdzić wiedząc, że

$$\frac{d}{dy} e^{Cy} = Ce^{Cy},$$

gdzie C — stała. Czyniąc tak dojdziemy do wniosku, że warunkiem tego, by dwie podane funkcje wykładnicze były rozwiązaniami naszego równania, jest relacja określająca k:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Pierwsza funkcja (e^{ikx}) odpowiada fali harmonicznej (o długości $\lambda = 2\pi/k$) biegnącej z lewa na prawo, druga (e^{-ikx}) — takiej samej fali biegnącej w przeciwnym kierunku. Pierwsza funkcja opisuje lwa biegnącego ku barierze, druga — lwa „odbitego" od bariery. Ogólnie funkcja falowa opisująca lwa na wybiegu będzie więc kombinacją:

$$\psi_{\mathrm{I}} = A_{\mathrm{I}} e^{ikx} + B_{\mathrm{I}} e^{-ikx},$$

gdzie A_{I} i B_{I} — stałe. Kwadrat bezwzględnej wartości pierwszego członu tej kombinacji (a więc i pierwszej stałej) określa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia na wybiegu lwa biegnącego ku barierze, kwadrat bezwzględnej wartości drugiego członu — lwa biegnącego od bariery (po „odbiciu"). Stałą A_{I} będziemy traktowali jako daną, zakładając tym samym, że wiemy wszystko o lwie biegnącym ku barierze. Do wyznaczenia pozostaje więc stała B_{I}.
Z kolei przepisujemy równanie Schrödingera dla obszaru II ($V = V_0$). I znowu szukamy rozwiązań podstawowych w postaci $e^{ik'x}$. Po zróżniczkowaniu dojdziemy do wniosku, że warunkiem tego, by funkcje takie były rozwiązaniem równania, jest relacja:

$$(k')^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}.$$

Jednakże z założenia $E < V_0$, więc k' musi być urojone:
$k' = i\varkappa$. Ogólne rozwiązanie równania Schrödingera dla obszaru II ma więc postać kombinacji:

$$\psi_{\mathrm{II}} = A_{\mathrm{II}} e^{\varkappa x} + B_{\mathrm{II}} e^{-\varkappa x}.$$

Pierwszy człon reprezentuje lwa, któremu udało się wniknąć do obszaru II; funkcja $e^{\varkappa x}$ wzrasta nieograniczenie przy $x \to \infty$, co oznacza, że jeśli $A_{\mathrm{II}} \neq 0$, to prawdopodobieństwo znalezienia lwa w tym obszarze także wzrasta nieograniczenie. Jest to fizycznie niemożliwe, wobec tego musi być:

$$A_{\mathrm{II}} = 0.$$

Co mają ze sobą wspólnego funkcje ψ_{I} i ψ_{II}? Każda opisuje tę samą cząstkę, tyle tylko, że w innym obszarze. Na granicy obszarów funkcje te muszą być więc równe: $\psi_{\mathrm{I}}(0) = \psi_{\mathrm{II}}(0)$, skąd:

$$A_{\mathrm{I}} + B_{\mathrm{I}} = B_{\mathrm{II}}.$$

Dalej, pochodna funkcji falowej przedstawia pęd cząstki. Na granicy obszarów muszą więc być także równe pochodne obydwu funkcji. Z tego ostatniego warunku brzegowego wynika, że

$$ik(A_{\mathrm{I}} - B_{\mathrm{I}}) = -\varkappa B_{\mathrm{II}}.$$

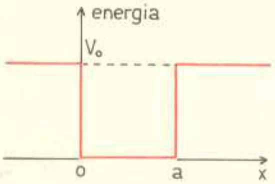
Z obydwu relacji dla stałych A_{I}, B_{I} i B_{II} uzyskujemy:

$$B_{\mathrm{I}} = -\frac{\varkappa + ik}{\varkappa - ik} A_{\mathrm{I}}, \quad \text{oraz} \quad B_{\mathrm{II}} = -\frac{2ik}{\varkappa - ik} A_{\mathrm{I}}.$$

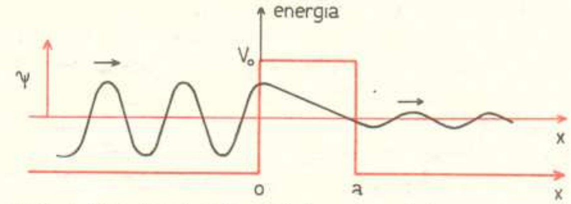
Jest to rezultat odmienny niż w mechanice klasycznej, bowiem $B_{\mathrm{I}} \neq A_{\mathrm{I}}$ oraz $B_{\mathrm{II}} \neq 0$. Oznacza to, że fala reprezentująca lwa dobiegającego do progu częściowo odbija się, a częściowo wnika do obszaru progu. Wprawdzie ta fala wnikająca jest silnie tłumiona, jednakże nie znika tożsamościowo. Czy to oznacza, że w chwili odbicia cząstka rozdwaja się na dwie mniejsze części, z których jedna wraca, a druga wnika do wnętrza progu, by tam w pewnej odległości zniknąć? Nie, uzyskany wynik wskazuje tylko, że prawdopodobieństwo odbicia cząstki jest mniejsze od jedności oraz że prawdopodobieństwo wniknięcia cząstki do wnętrza progu jest różne od zera. Spośród wielu lwów atakujących próg tylko część ich „odbije się", pewien natomiast ich ułamek wniknie do wnętrza obszaru II. Tłumienie funkcji ψ_{II} (a więc i gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym miejscu obszaru II) jest tym większa, im wyższy jest próg i im mniejszą energię ma cząstka. Wynika to z postaci wzorów określających ψ_{II} oraz współczynnik tłumienia $\varkappa$. Łatwo też zauważyć, że funkcja ψ_{II} będzie tożsamościowo równa zeru tylko wówczas, gdy $\varkappa \to \infty$ (nieskończenie silne tłumienie), czyli gdy $V_0 \to \infty$. Tylko w takim przypadku granicznym nastąpi całkowite odbicie.

Jak można sobie tłumaczyć to zjawisko wnikania cząstki do obszaru klasycznie wzbronionego? Niestety, nie ma sposobu przedstawienia tej sytuacji w języku mechaniki klasycznej, gdyż fizyka klasyczna sytuacji takich w ogóle nie dopuszcza. Obrazowo jednak rzecz ujmując, możemy cząstkę kwantową wyobrazić sobie jako swego rodzaju pakiet czy kłębek fal. Zanikający w obszarze II „ogon" funkcji falowej odpowiada w takim niezbyt adekwatnym modelu falowym „ramionom" cząstki, którymi sięga ona bezkarnie tam, gdzie jej mechanika klasyczna zabrania.

W tym miejscu Czytelnik domyśla się pewnie, jak dalej można rozumować. Skoro mianowicie cząstka może wniknąć z pewnym prawdopodobieństwem do obszaru II, to w sytuacji, kiedy obszar ten ma skończoną szerokość (rys. 2), z pewnym prawdopodobieństwem można znaleźć cząstkę po drugiej stronie bariery (jeśli bariera ma skończoną szerokość). Takie przenikanie cząstek przez bariery potencjalne nosi nazwę zjawiska tunelowego.



Rys. 5



Rys. 4. Zjawisko tunelowe (schematycznie)

Chętny Czytelnik pewnie zabierze się teraz do dokładnych obliczeń ilustrujących zjawisko tunelowe w przypadku bariery, jak na rys. 2, i w wyniku ich udowodni podany na wstępie warunek absolutnego bezpieczeństwa bariery dla lwów. Obliczenia te nie wniosą wiele nowego do naszej kwestii, choć pewnie poprawią nasze samopoczucie. Wyniknąć w nich powinny jednak nowe, ciekawe kwestie, dlatego warto przeprowadzić przedtem trochę rachunków i dyskusję innego, ale prostszego i pouczającego zagadnienia, mianowicie — cząstki w jamie potencjalnej (rys. 5).

Zjawisko tunelowe występuje dość często w różnych sytuacjach. Dla przykładu wymienimy: autoemisję (emisję zimną elektronów z metalu pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego), emisję cząstek alfa z jąder w wyniku rozpadu alfa oraz zjawiska Josephsona w złączach nadprzewodnikowych. Zapoznanie się z mechanizmami tych zjawisk pozwoli zdać sobie sprawę z realności i znaczenia efektu tunelowego.

Na pewno pomogą w tym książki, np.: R. P. Feynmana, R. B. Leightona i M. Sandsa, „Feynmana wykłady z fizyki", tom III; E. H. Wichmana „Fizyka kwantowa" (IV tom Berkeleyowskiego Kursu Fizyki).

Zadania

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

F14. W Stanach Zjednoczonych rozważa się projekty budowy pociągów „grawitacyjnych". Pociągi takie poruszałyby się wydrążonymi we wnętrzu Ziemi tunelami. Tunel łączący dwa miejsca na powierzchni Ziemi byłby prowadzony wzdłuż cięciwy. Pociąg grawitacyjny potrzebowałby lokomotywy jedynie do pokonania sił tarcia. Jakie są teoretyczne podstawy tych projektów? Pomijając na początek tarcie i przyjmując, że gęstość Ziemi jest w każdym jej punkcie jednakowa, obliczcie, ile wynosiłby czas przejazdu oraz jakim przyspieszeniom byliby poddawani podróżni? Promień Ziemi $R \approx 6370$ km, a przyspieszenie ziemskie $g = 9{,}81$ m/s^2.
Odpowiedzi szukajcie na str. 6

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M.40. Dany jest trójkąt prostokątny ABC ($\sphericalangle C = 90°$). Na przeciwprostokątnej zbudowano na zewnątrz trójkąta kwadrat o boku AB. Wyznaczyć $\sphericalangle OCB$, gdzie O jest środkiem kwadratu.
Rozwiązanie zadania na str. 3

M.41. Udowodnić, że w dowolnym dwunastokącie wypukłym istnieją dwie przekątne tworzące kąt o mierze mniejszej od 4° (przyjmujemy, że proste równoległe tworzą kąt 0°).
Rozwiązanie zadania na str. 10

M.42. Udowodnić, że 38 jest największą liczbą parzystą, która nie jest sumą dwóch liczb złożonych nieparzystych. Rozwiązanie zadania na str. 2