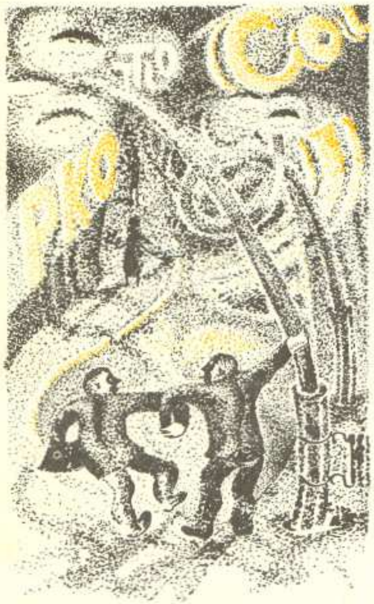
O zbiorach rozmytych



Dr hab. Wiktor MAREK i mgr inż. Michał SOBOLEWSKI

W kwietniowym numerze «Delty», w primaaprilisowym artykule *Aktualności podstaw matematyki*, nieznany nam bliżej autor pisał o „różnych rodzajach przynależności do zbioru", o „słabym byciu elementem" etc.
Żartobliwe uwagi autora odnoszą się jednakże — jak to się czasem zdarza — do problematyki nie całkiem pozbawionej sensu. Spotykamy się przecież w rzeczywistości z pojęciami, które nie są dokładnie sprecyzowane. Żeby zrozumieć, gdzie leży problem, trzeba najpierw powiedzieć, czym jest pojęcie. Otóż kiedy zajmujemy się jakąś dziedziną (liczbami naturalnymi na przykład), to pojęciem lub własnością jest nic innego, jak pewien zbiór elementów, o których mówi się w tej dziedzinie (np. pojęcie parzystości może być utożsamiane ze zbiorem liczb parzystych, własność „być liczbą pierwszą" natomiast może być utożsamiana ze zbiorem liczb pierwszych, etc.). Nie znajdziemy się w żadnych kłopotach, dopóki używane przez nas wyrażenia definiujące zbiory należeć będą do języka matematyki, sformalizowanego języka służącego do opisu odpowiedniej dziedziny. Kłopoty zaczynają się wtedy, kiedy staramy się poszerzyć klasę wyrażeń służących do opisu owych zbiorów i zaczynamy używać języka mniej lub bardziej potocznego.
Rozważmy przykład: Definiujemy podzbiór zbioru N liczb naturalnych złożony z „liczb dużo większych od 7". Oczywiście opis naszego zbioru nie jest ścisły; zawiera element subiektywizmu. W zależności mianowicie od tego, kto ma do czynienia z powyższym wyrażeniem, zbiór ten może przybierać różne postaci.
Ja na przykład sądzę, że liczba 43 należy do rozważanego zbioru, a prawdopodobnie większość Czytelników zgodziłaby się, że liczba 10^6 też do niego należy. Jednakże liczba 10^6-1 jest niewiele mniejsza od 10^6, więc i ją należy również zaliczyć do naszego zbioru; jest właściwie rzeczą oczywistą, że jeśli x jest dużo większy od 7 to i $x-1$ też. A stąd już bardzo blisko do konkluzji, że 7 jest dużo większe od 7, co jednak nie jest chyba prawdą.
Innym przykładem jest próba zdefiniowania „wysokiego mężczyzny". Tu powód niejednoznaczności będzie nieco inny, ale widać, że znowu powstają kłopoty.
Z problemem nieprecyzyjnego określania przynależności spotkali się inżynierowie zajmujący się komputerowym (automatycznym) rozpoznawaniem postaci.
Spójrzmy na przykład na znaczek  i spróbujmy powiedzieć, czy miała to być litera *a* czy *d*. Laseczka jest za krótka, byśmy byli pewni, że to jest *d*, ale za długa, by być pewnym, że jest to *a*.
Kiedy pojawia się problem, można być pewnym, że zostanie stworzona odpowiednia teoria. Rzeczywiście tak właśnie się stało i w naszym przypadku: powstała nowa teoria, której autorem był nie matematyk, lecz elektronik z z Uniwersytetu w Berkeley, L. Zadeh, napisał on szereg artykułów o teorii zbiorów rozmytych (*fuzzy sets*). Poniżej podamy zasadnicze jej pojęcia. Ze zrozumiałych względów nie potraktujemy tej teorii w jej maksymalnej ogólności.
Niech A będzie dowolnym zbiorem. Rozmytym podzbiorem zbioru A nazywamy dowolną funkcję rzeczywistą określoną na zbiorze A, o wartościach w przedziale domkniętym $\langle 0,1\rangle$. Jeśli f jest podzbiorem w takim sensie, to wartość $f(a)$ nazywamy stopniem przynależności a do zbioru f. Zauważmy, że utożsamiając zbiór $Y \subset A$ z funkcją charakterystyczną zbioru Y, tj. funkcją $\chi_Y : A \to \langle 0,1\rangle$ i określoną jak następuje:

$$\chi(a) = \begin{cases} 1, & a \in Y, \\ 0, & a \notin Y, \end{cases}$$

możemy zgodzić się, że każdy podzbiór zbioru A jest w szczególności jego podzbiorem rozmytym. Podzbiorów rozmytych danego zbioru jest dużo; nawet zbiór skończony ma nieskończenie wiele rozmytych podzbiorów. (Dlaczego?).
Wróćmy do naszego pierwszego przykładu: określmy f wzorem

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n \leqslant 7, \\ \dfrac{(n-7)^2}{1000+(n-7)^2} & \text{dla} \quad n > 7. \end{cases}$$

A więc:

$$f(8) = \frac{1}{1001}, \quad f(9) = \frac{4}{1004}, \ldots, \quad f(1007) = \frac{1000}{1001}.$$

Na przykład: funkcją charakterystyczną przedziału $\langle 0,2\rangle$ jest funkcja o następującym wykresie:

Proszę sprawdzić, że funkcja, określona dla każdego x rzeczywistego wzorem

$$\chi_C(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{n\to\infty} (\cos \pi x)^{2n}$$

jest funkcją charakterystyczną zbioru liczb całkowitych.

Jeśli f, g są dwiema funkcjami o wartościach rzeczywistych, określonymi na tym samym zbiorze, to symbol $\max(f, g)$ oznacza taką funkcję, która w każdym punkcie a tego zbioru przyjmuje wartość będącą większą z dwu liczb: $f(a)$ i $g(a)$. Np. jeśli $f(x) = x$, $g(x) = -x$, to $\max(f, g) = |x|$.

Warto zauważyć, że jeśli X, Y są „porządnymi" podzbiorami zbioru A to $\chi_{X \cup Y} = \max(\chi_X, \chi_Y)$, $\chi_{X \cup Y} = \min(\chi_X, \chi_Y)$, oraz $\chi_{-X} = 1 - \chi_X$.

Kwadratem kartezjańskim zbioru A nazywa się zbiór $A \times A$ — zbiór wszystkich uporządkowanych par elementów zbioru A. Ogólnie: n-tą potęgą kartezjańską zbioru A nazywa się zbiór $A \times A \times \ldots \times A$, a więc zbiór wszystkich n-wyrazowych ciągów elementów zbioru A. Relacją n-argumentową w zbiorze A nazywa się dowolny podzbiór n-tej potęgi kartezjańskiej tego zbioru. Zob. np. W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, 1972.

Przy odrobinie dobrej woli można by się zgodzić, że f jest właśnie rozmytym podzbiorem zbioru N złożonym z liczb znacznie większych od 7. Oczywiście na zbiorach rozmytych musimy określić jakieś działania teoriomnogościowe. Zostały one określone jak następuje:

$$f \cap g = \min(f, g),$$
$$f \cup g = \max(f, g),$$
$$-f = 1 - f.$$

Nie wszystkie prawa rachunku zbiorów zachodzą w „środowisku rozmytym". Na przykład formuła $f \cap -f = \emptyset$ nie jest prawdziwa. Z drugiej strony obowiązuje tu szereg użytecznych praw, na przykład rozdzielność i łączność działań, a także prawa de Morgana (Czytelniku, nie leń się, sprawdź!).
Rozmyte podzbiory potęgi kartezjańskiej zbioru A nazywamy rozmytymi relacjami w zbiorze A. (Na przykład relacja $x \gg y$: x jest znacznie większa od y). Szczególnie interesujące w zastosowaniach są relacje podobieństwa, tj. takie rozmyte relacje, które są zwrotne $(\bigwedge_x R(x, x) = 1)$, symetryczne $(\bigwedge_x \bigwedge_y R(x, y) = R(y, x))$ i przechodnie $(\bigwedge_x \bigwedge_y \bigwedge_z R(x, z) \geqslant \sup_y (\min (R(x, y), R(y, z))))$.
Niech f będzie rozmytym podzbiorem zbioru A. Dla każdego $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$ określamy: $f_\alpha = \{x : f(x) \geqslant \alpha\}$. Oczywiście f_α jest już „nierozmytym" podzbiorem zbioru A. Znajomość rodziny $\{f_\alpha : \alpha \in \langle 0,1 \rangle\}$ jest równoważna znajomości rozmytego zbioru A. Zbiór f_α możemy interpretować jako zbiór tych x, które przynależą do f w stopniu co najmniej α.
Jeśli R jest relacją podobieństwa (rozmytą relacją równoważności) w zbiorze A, to R_α jest relacją równoważności; przy coraz to większym α otrzymujemy coraz „drobniejsze" relacje.
Rozważmy przykład. Określmy rozmytą relację R na zbiorze $\{1, \ldots, 6\}$ przy pomocy następującej tabelki:

	1	2	3	4	5	6
1	1	0,4	0,4	0,6	0,8	0,9
2	0,4	1	1	0,4	0,4	0,4
3	0,4	1	1	0,4	0,4	0,4
4	0,6	0,4	0,4	1	0,6	0,6
5	0,8	0,4	0,4	0,6	1	0,8
6	0,9	0,4	0,4	0,6	0,8	1

Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że R jest relacją podobieństwa. Jak mówiliśmy R reprezentuje rodzinę relacji równoważności R_α. Rozkłady zbioru $\{1, \ldots, 6\}$ na klasy elementów równoważnych odpowiadające tym relacjom wyglądają następująco:

$$\{\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\};\ \{\{1, 4, 5, 6\}, \{2, 3\}\};\ \{\{1, 5, 6\}, \{4\}, \{2, 3\}\}$$
$$\{\{1, 6\}, \{5\}, \{4\}, \{2, 3\}\};\ \{\{1\}, \{6\}, \{5\}, \{4\}, \{2, 3\}\}.$$

Zbiory „rozmyte" znalazły szerokie zastosowanie, a z ich teorią (choć może z niezbyt głębokimi jej aspektami) spotkają się na pewno ci spośród naszych Czytelników, którzy zajmą się teorią rozpoznawania obrazów.

Rozwiązanie zadania M37.

Zbadajmy, czemu równa jest liczba $x\sqrt{2}$. Mamy

$$x\sqrt{2} = \sqrt{8+2\sqrt{7}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} - 2 =$$
$$= \sqrt{7+2\sqrt{7}+1} - \sqrt{7-2\sqrt{7}+1} - 2 =$$
$$= \sqrt{(\sqrt{7}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2} - 2 =$$
$$= (\sqrt{7}+1) - (\sqrt{7}-1) - 2 = 0.$$

Tak więc $x = 0$.

Szanowna Redakcjo!

Podczas wakacji rozwiązywaliśmy z kolegą szereg problemów matematyczno-fizycznych i doszliśmy do wniosku, że warto nawiązać kontakt z kolegami i koleżankami o podobnych zainteresowaniach. Postanowiliśmy więc założyć Amatorski Ośrodek Badań i Problemów Matematyczno-Fizycznych. Proszę więc o zamieszczenie mojego listu, gdyż w ten sposób najłatwiej chyba nawiązać kontakty z kolegami i koleżankami z całego kraju. Mój adres: Marek Snopczyński, ul. Środkowa 6a m. 20, 03-430 Warszawa.
Obiecuję odpisać na każdy list.
Drukujemy list i zachęcamy Czytelników do wymiany poglądów nie tylko listownie, ale też — osobiście. Będziemy systematycznie drukowali nadsyłane adresy zwolenników inicjatywy kolegi Snopczyńskiego.

Sprostowanie

W zadaniu **M23** opuszczone zostało pomyłkowo założenie: $AB < BC < CA$. Bez tego założenia podane w numerze 8 «Delty» rozwiązanie nie jest poprawne, na co zwrócił uwagę Zbigniew Szkutnik z Zarzecza. Warto zauważyć, że rozwiązanie jest poprawne również przy słabszym założeniu, że AC jest większy od każdego z dwu pozostałych boków.