O przestrzeniach metrycznych

Doc. dr hab. Maria MOSZYŃSKA

Każdy z nas styka się w codziennym życiu z pojęciem odległości, jednak zapytany, co przez to rozumie, miałby zapewne kłopot z udzieleniem precyzyjnej odpowiedzi. Nic dziwnego, przecież odległość z Warszawy do Krakowa jest inna dla kogoś kto jedzie pociągiem a inna dla podróżującego samolotem; odległość jednego punktu miasta od drugiego inna jest dla przechodnia, który przestrzega przepisów, a inna dla takiego, który skraca sobie drogę przez jezdnie i trawniki. Jakkolwiek rozumiane, pojęcie odległości ma jednak pewne cechy, co do których wszyscy są zgodni. Te oczywiste dla wszystkich własności posłużyły matematykom do sprecyzowania definicji odległości, a ściślej mówiąc, do wprowadzenia pojęcia przestrzeni metrycznej.

Wyobraźmy sobie, że mamy jakikolwiek zbiór X oraz funkcję, która każdej parze elementów (czyli, jak zwykło się mówić, punktów) a, b ze zbioru X przyporządkowuje liczbę rzeczywistą nieujemną $\varrho(a, b)$. Funkcja ta nazywa się *odległością* (lub *metryką*), jeżeli spełnia następujące trzy warunki:

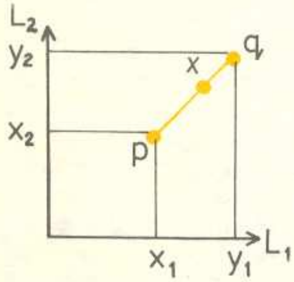
(i) $\varrho(a, b) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$,
(ii) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$,
(iii) $\varrho(a, b) + \varrho(b, c) \geqslant \varrho(a, c)$.

Na mocy warunku (i) odległość dwóch punktów jest równa zeru wtedy i tylko wtedy, gdy te punkty są identyczne. Zgodnie z warunkiem (ii) odległość punktu a od b jest taka sama, jak b od a. Na mocy warunku (iii) suma odległości punktu a od b i punktu b od c nie może być mniejsza niż odległość a od c. Warunek ten nosi nazwę *nierówności trójkąta*, co nikomu nie wyda się dziwne, jeżeli zgodzi się rozumieć przez „trójkąt" dowolną trójkę punktów zbioru X.

Para (X, ϱ) złożona ze zbioru X i metryki ϱ nazywa się *przestrzenią metryczną*. Łatwo się przekonać, że warunki (i)–(iii) bynajmniej nie wyznaczają jednoznacznie metryki ϱ w danym zbiorze X. Inaczej mówiąc, dowolny zbiór można *zmetryzować* na wiele różnych sposobów, tzn. można na wiele sposobów mierzyć w nim odległość. Zilustrujemy to na przykładach.

Płaszczyznę euklidesową najczęściej metryzuje się określając odległość ϱ tzw. wzorem Pitagorasa. Mianowicie, jeżeli punkty p i q mają odpowiednio współrzędne (x_1, x_2) i (y_1, y_2), to

$$\varrho(p, q) \underset{\mathrm{Df}}{=} \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \tag{1}$$



Rys. 1

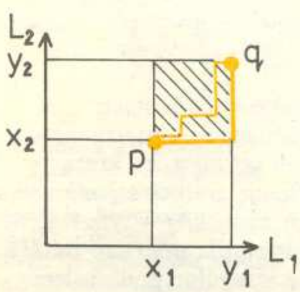
Można łatwo dowieść, że taka funkcja ϱ spełnia warunki (i)–(iii), a więc jest metryką. Jest to tzw. *metryka kartezjańska* na płaszczyźnie. Odcinek pq, przedstawiony na rys. 1, jest zbiorem wszystkich punktów spełniających równanie $\varrho(p, x)+\varrho(x, q) = \varrho(p, q)$. O takich punktach mówi się, że *leżą między* p i q.

Funkcja $\bar{\varrho}$ określona przez wzór

$$\bar{\varrho}(x, y) \underset{\mathrm{Df}}{=} |x_1-y_1|+|x_2-y_2| \tag{2}$$

również jest metryką. Jest to tzw. *metryka miejska*.

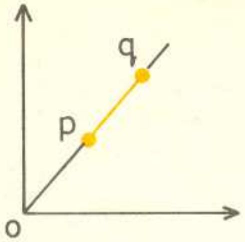
Łatwo się domyśleć, skąd pochodzi ta nazwa. Wyobraźmy sobie miasto, w którym wszystkie ulice biegną ze wschodu na zachód lub z południa na północ. Żeby dostać się z jednego punktu do drugiego trzeba na ogół przebyć drogę, która jest pewną łamaną. W szczególnym przypadku, gdy oba punkty są położone na tej samej ulicy, łamana ta jest po prostu odcinkiem. Oczywiście zamiast drogą zaznaczoną na rys. 2 grubą kreską, można od p do q przejść drogą „cienką" o tej samej długości. Takich możliwych dróg od p do q o długości $\bar{\varrho}(p, q)$ dla p, q nie leżących na jednej ulicy jest nieskończenie wiele, wypełniają one prostokąt o bokach równoległych do osi L_1 i L_2 i o przeciwległych wierzchołkach p, q. Prostokąt ten jest — jak łatwo sprawdzić — zbiorem wszystkich punktów leżących między p i q w sensie metryki $\bar{\varrho}$.



Rys. 2

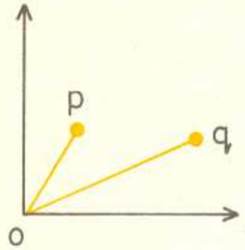
Innym przykładem metryzacji płaszczyzny jest tzw. *metryka kolejowa*, określona wzorem

$$(3)\qquad \varrho^*(p, q) = \begin{cases} \varrho(p, q) & \text{jeżeli punkty } o, p, q \text{ są współliniowe (rys. 3a)} \\ \varrho(p, o)+\varrho(o, q) & \text{jeżeli punkty } o, p, q \text{ nie są współliniowe (rys. 3b).} \end{cases}$$



Rys. 3a

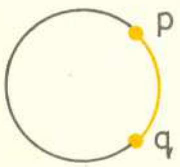
Punkt o odgrywa tu rolę węzła kolejowego. Jeżeli punkty p i q leżą na jednym torze, przejechanie koleją z p do q nie wymaga nakładania drogi. Jeżeli leżą na różnych torach, trzeba przejechać przez węzeł, więc odległość kolejowa jest wtedy większa od zwykłej (kartezjańskiej). W pierwszym przypadku zbiór punktów leżących między p i q jest odcinkiem pq (rys. 3a), w drugim — łamaną poq (rys. 3b).



Rys. 3b

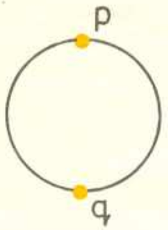
Jasne jest, że jeżeli umiemy zmierzyć odległość dowolnych dwóch punktów zbioru X, umiemy to również zrobić dla każdego podzbioru zbioru X. Ściślej mówiąc, metryka ϱ w zbiorze X metryzuje zarazem dowolny jego podzbiór X_0. Niech na przykład X_0 będzie okręgiem na płaszczyźnie euklidesowej ze zwykłą odległością ϱ (wzór (1)). Odległość $\varrho(p, q)$ dowolnych dwu punktów p, q okręgu X_0 jest więc długością cięciwy o końcach p, q. Ten sam zbiór X_0 można jednak zmetryzować inaczej, abstrahując od „otaczającego świata'', tj. od przestrzeni X.

Można na przykład określić nową odległość $\breve{\varrho}(p, q)$ jako długość mniejszego z dwóch łuków o końcach p, q. Odpowiada to sytuacji, w której okrąg X_0 byłby brzegiem jeziora, a osoba mierząca odległość nie umiałaby pływać. Łatwo sprawdzić, że przy takiej metryzacji okręgu zbiór punktów leżących między p i q jest na ogół krótszym łukiem o końcach p, q (rys. 4a). Na ogół, ale nie zawsze — wyjątek stanowią pary tzw. punktów antypodycznych (maksymalnie oddalonych); między takimi antypodami leżą wszystkie punkty okręgu (rys. 4b).



Rys. 4a

Przedstawiona tu relacja leżenia między jest jednym z wielu pojęć, które można zdefiniować przy pomocy odległości, to jest tzw. pojęć metrycznych. Innym przykładem takiego pojęcia jest pojęcie środka pary punktów.
Rozważmy dowolną przestrzeń metryczną (X, ϱ).
Punkt x zbioru X jest środkiem pary punktów p, q (w sensie metryki ϱ) wtedy i tylko wtedy gdy $\varrho(p, x) = \frac{1}{2}\varrho(p, q) = \varrho(x, q)$.



Rys. 4b

A więc środek jest to taki punkt x, który leży między p i q i jest równo odległy od p i q. Na płaszczyźnie z metryką kartezjańską lub kolejową każda para punktów ma dokładnie jeden środek, natomiast na płaszczyźnie z metryką miejską każda para punktów nie leżących na jednej „ulicy'' ma nieskończenie wiele środków. Znalezienie takiego zbioru środków pozostawiamy Czytelnikowi. Na okręgu z metryką kartezjańską żadna para punktów nie ma środka, na okręgu z metryką łukową $\breve{\varrho}$ każda para posiada środek, a pary antypodów mają po dwa środki.
Przestrzeń metryczna, w której każda para punktów ma co najmniej jeden środek, nazywa się *wypukłą*, a taka, w której każda para punktów ma dokładnie jeden środek — *mocno wypukłą*. A więc płaszczyzna z metryką ϱ lub ϱ^* jest mocno wypukła, a z metryką $\breve{\varrho}$ jest wprawdzie wypukła, ale nie jest mocno wypukła. Przykładem przestrzeni, która nie jest wypukła, jest okrąg z metryką ϱ.

CDN

Przygoda w fizyce

Prof. Marian DANYSZ, członek rzeczywisty PAN

Ludwik Wertenstein (ur. 16 IV 1887, zm. 18 I 1945) studiował w Paryżu, był asystentem Marii Skłodowskiej-Curie. W jej zastępstwie kierował Pracownią Radiologiczną Warszawskiego Towarzystwa Naukowego. Prof. M. Danysz (ur. 17 III 1909) jest znany naszym Czytelnikom z artykułów omawiających odkrycie hiperjąder («Delta», 1974, nr 10) oraz podwójnego hiperfragmentu («Delta» 1974, nr 1), w których to odkryciach uczestniczył.

Z górą chyba czterdzieści lat temu byłem zatrudniony w Pracowni Radiologicznej w Warszawie, kierowanej przez profesora Ludwika Wertensteina. Głównym wyposażeniem pracowni był właściwie dar Marii Skłodowskiej-Curie w postaci 60 mg radu. Rad ten stanowił źródło wszystkich aktywności, z którymi, pracowano w laboratorium. Lata trzydzieste, kiedy pracowałem w laboratorium były okresem bardzo ciekawym. Wtedy właśnie odkryto neutron, pozyton, a Fryderyk Joliot-Curie odkrył promieniotwórczość wzbudzoną przez naświetlanie rozmaitych materiałów cząstkami α. Pamiętam, że kiedyś zwróciłem