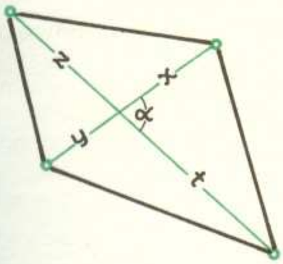
Rozwiązanie zadania M35:
Zauważmy najpierw, że pole S czworokąta wypukłego o przekątnych długości d_1 i d_2 i kącie między przekątnymi α jest równe $\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$. Mamy bowiem (zob. rysunek):



$$S = \frac{1}{2} xt \sin\alpha + \frac{1}{2} ty \sin(180° - \alpha) +$$
$$+ \frac{1}{2} yz \sin\alpha + \frac{1}{2} zx \sin(180° - \alpha) =$$
$$= \frac{1}{2} xt \sin\alpha + \frac{1}{2} ty \sin\alpha +$$
$$+ \frac{1}{2} yz \sin\alpha + \frac{1}{2} zx \sin\alpha =$$
$$= \frac{1}{2} (x+y)(z+t) \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha.$$

(Korzystaliśmy z tego, że pole trójkąta jest równe połowie iloczynu dwóch boków przez sinus kąta między nimi zawartego).
Tezą zadania jest więc nierówność

$$\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha \leq \frac{1}{4} (d_1^2 + d_2^2),$$

czyli

$$0 \leq d_1^2 - 2d_1 d_2 \sin\alpha + d_2^2.$$

Mamy $d_1^2 - 2d_1 d_2 \sin\alpha + d_2^2 =$
$= (d_1 + d_2)^2 + 2d_1 d_2 (1 - \sin\alpha) \geq 0$
gdyż $(d_1 - d_2)^2 \geq 0$ i $1 - \sin\alpha \geq 0$,
$d_1 > 0$, $d_2 > 0$.
Z powyższego rozumowania wynika również, kiedy pole czworokąta wypukłego równe jest $\frac{1}{4}$ sumy kwadratów długości przekątnych. Jest tak mianowicie tylko wtedy, gdy $d_1 = d_2$ i $\sin\alpha = 1$, tzn. gdy przekątne są prostopadłe i równej długości.

Zatem przypuszczenie, że Z znajduje się w worku, należy odrzucić, gdyż prowadzi do sprzeczności.
Skoro Z nie znajduje się w worku wnosimy automatycznie, że Z znajduje się poza workiem, i nie ma potrzeby sprawdzania tego. Zabawmy się jednak w upartych kontrolerów i sprawdźmy po swojemu, czy rzeczywiście Z znajduje się poza workiem.
Przypuśćmy więc, że Z znajduje się poza workiem. Wtedy prawdą jest, że $Z \notin Z$. Skoro zaś prawdą jest, że $Z \notin Z$, to na podstawie (1), podstawiając Z zamiast X_α i czytając (1) z prawej do lewej, otrzymujemy, że prawdą też jest, iż $Z \in Z$; a więc otrzymujemy sprzeczność.
Zatem przypuszczenie, że Z znajduje się poza workiem, należy odrzucić, bo prowadzi do sprzeczności.
Ostatecznie wykazaliśmy, że Z nie może być ani w worku, ani poza nim! Zatem kontrola, która wydawała się zbyteczna, była potrzebna, dała zadziwiający rezultat.
A jak wytłumaczyć stwierdzony fakt, że Z nie ma ani w worku, ani poza nim, że źle babka wróżyła, wróżąc na dwoje?
Po prostu tym, że Z nie istnieje.
A zatem, jeśli weźmiemy funkcję zdaniową $X \notin X$, to istnieją elementy spełniające tę funkcję zdaniową, np. X_0 = zbiór stolic, X_1 = zbiór planet, ale nie istnieje zbiór wszystkich elementów spełniających tę funkcję zdaniową. (Niesamowite!).

Okazuje się więc, że wbrew temu, co sądziliśmy na początku, zachodzi potrzeba zatrzymania się nad pojęciem zbioru i pojęciem przynależności elementów do zbioru, że nie możemy sobie pozwolić na tworzenie zbiorów z elementów jakich nam się tylko podoba, np. nie możemy sobie pozwolić na utworzenie zbioru z elementów spełniających funkcję zdaniową $X \notin X$.
Wniosek ten jest ciosem wymierzonym w intuicyjne pojmowanie zbioru. Wobec takiej sytuacji trzeba powiedzieć, co to jest zbiór, czyli trzeba podać definicję zbioru, i to taką, ażeby się uchronić od udowodnionej wyżej sprzeczności i od sprzeczności w ogóle.
Tymczasem nie możemy znaleźć takiego zespołu słów, którym by można wyrazić wprost to, co chcemy uznać za zbiór. Skoro nie możemy powiedzieć wprost, co to jest zbiór, więc z konieczności zażądajmy przynajmniej stwierdzenia, jakie własności powinien spełniać twór, który chcemy uznać za zbiór. Własności te wypowiadamy w pewnych zdaniach. Zatem przez zbiór należy rozumieć od tej chwili jakikolwiek twór, który spełnia warunki sformułowane w tych zdaniach. Wobec tego zdania te można uznać za definicję zbioru, ale nie za definicję zwyczajną, bezpośrednią, lecz za definicję uwikłaną, zamaskowaną, niejawną. Ponieważ w zdaniach tych wypowiadamy łącznie własności zbioru i własności pojęcia przynależności elementu do zbioru, przeto zdania te są zarazem definicją uwikłaną pojęcia zbioru i pojęcia przynależności elementu do zbioru. Od tej pory pojęciami tymi wolno posługiwać się jedynie w ten sposób, na jaki pozwalają te zdania.
Zdania te nazywamy „aksjomatami teorii mnogości''. Mówimy, że zbiór i pojęcie przynależności elementu do zbioru definiujemy „aksjomatycznie''.
Z przytoczonych do tej pory rozważań widać wyraźnie, że zachodzi potrzeba aksjomatycznego ujmowania teorii matematycznych. Aksjomaty stanowią fundament każdej teorii. Osobliwość ich polega na tym, że kryją w sobie nieskończenie wiele twierdzeń, które przez zastosowanie odpowiednich środków wnioskowania dają się z tych aksjomatów wyprowadzić.
Teorię mnogości po raz pierwszy zbudował matematyk niemiecki J. Cantor. Zbudował on teorię mnogości nie w sposób aksjomatyczny, lecz intuicyjny. Wówczas angielski logik B. Russell podał przykład, w którym zastosowane intuicyjne rozumienie zbioru, wydające się niewątpliwie pewne, prowadzi do sprzeczności. Właśnie tę sprzeczność, zwaną „antynomią Russella'', przedstawiliśmy wyżej.
Pierwszym, który podał aksjomaty teorii mnogości, był niemiecki matematyk E. Zermelo.
Czytelnik pragnący zapoznać się z tymi aksjomatami znajdzie je np. w *Zarysie logiki matematycznej* A. Grzegorczyka (1973).

Sylwestrowy mini-konkurs!

Czterej koledzy — Edward, Franciszek, Jerzy i Hubert — poszli razem z żonami do klubu na bal noworoczny. Z początku każdy tańczył ze swoją żoną, ale wkrótce pary się przemieszały. Basia tańczyła z Edwardem, Alicja z mężem Karoliny, Dorota z mężem Alicji, Franciszek z żoną Jerzego i Jerzy z żoną Edwarda. Proszę rozsupłać tę mieszaninę par, podając imiona współmałżonków oraz kto z kim tańczył?