Od szczególnego przypadku do uogólnienia cz. (II)
Wariacje na temat „Problem A — zamki i klucze”

Prof. dr Zofia KRYGOWSKA

Punktem wyjścia do naszych rozważań będzie jedno z zadań ostatniego etapu Olimpiady Matematycznej z roku 1971. Nazwiemy je „Problemem A — zamki i klucze”. Oto jego treść.

Należy zabezpieczyć przez zainstalowanie zamków urządzenie sygnalizacyjne oraz rozdać klucze do tych zamków jedenastu wybranym osobom tak, aby każdy co najmniej sześcioosobowy zespół tych osób miał klucze do wszystkich zamków oraz aby każdemu mniej licznemu zespołowi brakowało klucza do przynajmniej jednego z tych zamków. Jaką najmniejszą liczbę zamków trzeba zainstalować oraz jak rozdać do nich klucze? Dla uproszczenia będziemy te zespoły, rozporządzające wszystkimi kluczami (a więc zespoły co najmniej sześcioosobowe), nazywać dalej zespołami uprawnionymi, zespoły zaś mniej liczne, nie mające dostępu do wszystkich zamków — nieuprawnionymi. Każdy zespół sześcioosobowy — to minimalny zespół uprawniony, każdy zespół pięciosobowy — to maksymalny zespół nieuprawniony.

Poszukajmy rozwiązania problemu A. Przypuszczamy, że rozwiązanie to istnieje. Niechaj S będzie minimalnym zespołem uprawnionym. Wtedy zespół $\overline{S}$, dopełniający S do pełnej jedenastki, nie jest zespołem uprawnionym, bo pięcioosobowym, a więc musi istnieć zamek, do którego klucza nie posiada żadna z osób tego zespołu. Natomiast każda z osób należących do zespołu S ma klucz do tego zamka, gdyby bowiem choć jedna z nich takiego klucza nie miała, to dołączając ją do zespołu $\overline{S}$, otrzymalibyśmy zespół sześcioosobowy, nie mający dostępu do tego zamka wbrew warunkom zadania. Stwierdzamy: jeżeli zadanie A ma rozwiązanie, to dla każdego maksymalnego zespołu uprawnionego istnieje zamek, do którego klucz otrzyma każda z osób tego zespołu i do którego nie otrzyma klucza żadna inna osoba. Wobec tego, jeżeli z jest zamkiem przydzielonym w ten sposób zespołowi sześcioosobowemu S, zaś S' jest zespołem sześcioosobowym różnym od S, to w zespole S' musi się znaleźć osoba nie mająca klucza do zamka z. Zespołowi S' trzeba więc przydzielić w opisany sposób zamek z' różny od zamka z. Musimy zatem mieć co najmniej tyle zamków, ile jest zespołów sześcioosobowych, a więc $\binom{11}{6}$, czyli 462. Są to konieczne warunki istnienia rozwiązania; czy wystarczy je zrealizować, aby otrzymać rozwiązanie spełniające warunki zadania?

Numerujemy zespoły sześcioosobowe (minimalne zespoły uprawnione) i tworzymy następujące ciągi: a) ciąg $S_1, S_2, \ldots, S_{462}$ zespołów sześcioosobowych, b) ciąg $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_{462}$ zespołów dopełniających odpowiednie zespoły sześcioosobowe do pełnej jedenastki (a więc ciąg maksymalnych zespołów nieuprawnionych), c) ciąg zamków $z_1, z_2, \ldots, z_{462}$. Osobom zespołu S_i, i tylko tym osobom, dajemy klucze do zamka z_i. Wtedy oczywiście zespół $\overline{S}_i$ nie będzie rozporządzał kluczem do zamka z_i. Natomiast każdy zespół S_j ($j \neq i$) będzie już miał klucz do tego zamka, do zespołu bowiem S_j należy przynajmniej jedna osoba zespołu S_i (każdy z tych zespołów liczy 6 osób, a wszystkich osób jest 11). Udowodniliśmy więc, żę przydzielając klucze do zamków w opisany sposób, zrealizujemy warunki zadania: każdy zespół sześcioosobowy, a więc też każdy zespół uprawniony, rozporządzać będzie kluczami do wszystkich zamków; żaden z zespołów pięcioosobowych, a więc też żaden z zespołów nieuprawnionych, nie będzie rozporządzał wszystkimi takimi kluczami. Zauważmy przy tym, że jest to rozwiązanie jedyne przy minimalnej liczbie zainstalowanych zamków.

Rozwiązaliśmy nasze zadanie i teraz „spoglądamy wstecz” na przebytą drogę. Czy liczby 11, 5, 6 były istotne dla rozumowania? Spostrzegamy od razu, że możemy przenieść rozwiązanie do ogólniejszego przypadku bez zmian, przyjmując,

OSOBY / ZAMKI	a	b	c	d	e	f
1					+	+
2			+	+		
3	+	+				

że pełny zespół liczy $2n+1$ osób, maksymalne zespoły nieuprawnione po n osób, minimalne zespoły uprawnione po $n+1$ osób.

Zauważmy także, że warunki:

a) minimalny zespół uprawniony liczy o jedną osobę więcej niż maksymalny zespół nieuprawniony,

oraz

b) zespół jest uprawniony wtedy i tylko wtedy, gdy uzupełniający go zespół jest nieuprawniony

nie mogłyby być zrealizowane, gdyby pełny zespół liczył parzystą liczbę osób. A z tych założeń korzystaliśmy w sposób istotny w naszym rozumowaniu. Te warunki wydają się nam bardzo ciasne i bardzo ograniczające wybór zespołów uprawnionych. Nie można na przykład przy ich zachowaniu uwzględnić różnic w kompetencjach osób uczestniczących w pełnym zespole.

Spróbujmy skonstruować problem B, w którym właśnie kompetencje odgrywałyby istotną rolę w wyborze zespołów uprawnionych. Proponujemy zespół sześciu osób: a, b, c, d, e, f. Osoby a, b — to specjaliści w jednej dziedzinie; c, d — w innej; e, f — w jeszcze innej. Uznamy, że zespół jest uprawniony wtedy i tylko wtedy, gdy należy doń choć jedna osoba z każdej z tych specjalności. Jak rozwiążemy w tym przypadku „problem zamków i kluczy"?

Rozwiązanie przedstawia tabelka. Rozumujemy w sposób następujący: Zespół osób a, b, c, d jest jednym z maksymalnych zespołów nieuprawnionych, musi więc istnieć zamek, do którego kluczy nie otrzyma żadna z tych osób, ale do którego otrzyma klucze każda z pozostałych osób, ponieważ każda trójka specjalistów z różnych dziedzin jest już zespołem uprawnionym. Kontynuujemy to rozumowanie aż do wyczerpania wszystkich maksymalnych zespołów nieuprawnionych. Moglibyśmy oczywiście postępować mniej „oszczędnie" i zamiast rozważać tylko maksymalne zespoły nieuprawnione uwzględnić w tabeli kolejno wszystkie zespoły nieuprawnione (byłoby to jednak marnowaniem zamków i kluczy).

Zauważmy, że rozwiązania otrzymanego w przypadku problemu A nie moglibyśmy zastosować do problemu B. Zespół $\{a, c, e\}$ jest uprawniony, ale nie ma zamka, do którego klucze otrzymałyby wszystkie te, i tylko te, osoby. Natomiast, na odwrót, rozwiązanie zadania B możemy przystosować do warunków zadania A. W tym bowiem przypadku przyporządkowując każdemu maksymalnemu zespołowi nieuprawnionemu zamek, do którego klucza nie otrzymuje żadna z osób tego zespołu — do którego natomiast otrzymuje klucz każda pozostała osoba — przyporządkowujemy tym samym każdemu minimalnemu zespołowi uprawnionemu zamek, do którego klucz otrzymuje każda osoba tego zespołu i nie otrzymuje klucza żadna z pozostałych osób. Wynika to stąd, że w przypadku A zespół jest uprawniony wtedy, i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie do całej jedenastki jest zespołem nieuprawnionym. Ten warunek bardzo szczególny nie jest spełniony w przypadku B. Rozwiązanie zadania B ma więc charakter ogólniejszy. Nasuwa nam to pomysł nowego wariantu „problemu zamków i kluczy", a mianowicie wariantu C, w którym pozostawimy zupełną swobodę w wyborze zespołów uprawnionych z jednym naturalnym warunkiem, że każdy zespół, którego część jest zespołem uprawnionym, jest też zespołem uprawnionym. W języku matematyki rodzinę podzbiorów pewnego zbioru o takiej własności, że każdy podzbiór tego zbioru, zawierający jakiś zbiór należący do tej rodziny, sam też do tej rodziny należy — nazywamy *idealem podzbiorów* pełnego zbioru.

Żądamy więc tylko, aby rodzina wyróżnionych zespołów uprawnionych była ideałem podzbiorów pełnego zbioru. Tak będzie zawsze w praktyce naszego „problemu zamków i kluczy", niezależnie od kryteriów, którymi kierowaliśmy się, wybierając zespoły uprawnione. Zakładamy, że ten warunek jest spełniony oraz że istnieją zarówno zespoły uprawnione, jak i nieuprawnione w pełnym zespole. Instalujemy tyle zamków, ile jest zespołów nieuprawnionych. Każdemu zespołowi nieuprawnionemu przyporządkowujemy dokładnie jeden zamek i dajemy klucze do tego zamka wszystkim osobom nie należącym do tego zespołu, i tylko tym osobom. Różnym zespołom nieuprawnionym przyporządkowujemy w ten sposób różne klucze. Oczywiście wtedy żaden z zespołów nieuprawnionych nie będzie miał kluczy do wszystkich zamków. Jeżeli zaś S jest dowolnym zespołem uprawnionym, z dowolnym zamkiem, zaś S' zespołem nieuprawnionym, któremu przyporządkowano zamek z, to S nie jest częścią S', bo S jako zespół uprawniony nie może się zawierać w żadnym zespole nieuprawnionym (tu korzystamy z tego warunku, że rodzina zespołów uprawnionych jest ideałem podzbiorów pełnego zbioru). Do zespołu S należy więc przynajmniej jedna osoba nie należąca do S', a więc mająca klucz do zamka z. Zespół S rozporządza kluczami do wszystkich zamków.

Uwolniliśmy więc nasz „problem zamków i kluczy" od wszystkich warunków ograniczających wybór zespołów uprawnionych (warunek, że zespół zawierający zespół uprawniony jest zespołem uprawnionym, jest praktycznie zawsze spełniony, gdy dostęp do urządzenia zależy od posiadania kluczy do wszystkich zamków zabezpieczających to urządzenie). Jakkolwiek te zespoły wyznaczymy, zawsze będzie można tak zainstalować zamki i tak rozdać klucze, że zespoły uprawnione, i tylko te zespoły, będą miały możliwość nadania sygnału.

Spoglądając wstecz na przebytą drogę dostrzegamy, jak „przedłużanie" pierwszego problemu, rozważanie jego wariantów, pozwoliło nam odkryć to, co jest istotne dla rozwiązania — pewną strukturę matematyczną, którą wprowadzamy do zbioru wszystkich możliwych zespołów, wybierając z nich zespoły uprawnione według dowolnie ustalonych zasad. Dane numeryczne w pierwszym zadaniu skierowały nas nie na najbardziej ogólną drogę. To, co się nam wydawało początkowo ważne, i z czego korzystaliśmy wyraźnie w rozumowaniu, okazało się nieistotne dzięki temu, że postępowaliśmy tak, jak to zaleca G. Polya: „Żaden problem nie jest nigdy wyczerpany całkowicie. Zawsze coś pozostaje jeszcze do zrobienia; badając problem dostatecznie wnikliwie, możemy ulepszyć każde rozwiązanie, a w każdym razie zawsze udoskonalić nasze rozumienie rozwiązania".

Czy nasze problemy A, B i C są jednak rzeczywiście problemami matematycznymi? Moglibyśmy je od razu sformułować w języku teorii mnogości i wtedy ich matematyczny charakter byłby od razu widoczny. Czytelnikowi obeznanemu z językiem mnogościowym proponujemy powiązanie z naszymi rozważaniami następującego zadania D: Dany jest zbiór K i niepusta rodzina $\mathbf{U}$ jego niepustych podzbiorów, będąca ideałem podzbiorów zbioru K. Z jest zbiorem równolicznym z rodziną pozostałych podzbiorów zbioru K. Zdefiniować takie odwzorowanie f zbioru K w zbiór $\mathbf{P}(Z)$, aby dla każdego podzbioru X zbioru K spełniony był warunek:

$$X \in \mathbf{U} \Leftrightarrow \Big[\bigcup_{a \in X} f(a) = Z\Big].$$

Rozwiązanie tego ogólnego zadania będzie polegać tylko na odpowiednim zapisie rozwiązania zadania C.

Zauważmy, że rozwiązując zadanie C przydzielaliśmy zamki i klucze nieoszczędnie. Przyporządkowywaliśmy zamki wszystkim zespołom nieuprawnionym, nie tylko maksymalnym, choć mogliśmy wybrać to oszczędniejsze przyporządkowanie. Ale zrezygnowaliśmy z tego celowo, aby uzyskać rozwiązanie ogólniejszego problemu D, w którym nie będziemy już zakładać, że rozważane zbiory są skończone. Gdy tego nie zakładamy, nie mamy pewności, że istnieją minimalne zespoły w rodzinie $\mathbf{U}$ i maksymalne zespoły w rodzinie pozostałych podzbiorów zbioru pełnego K. Na przykład, jeżeli K jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, $\mathbf{U}$ rodziną jego podzbiorów, z których każdy zawiera w sobie jakiś przedział otwarty, to w rodzinie $\mathbf{U}$ nie ma minimalnych zbiorów (to znaczy takich, że wyłączając jeden element otrzymujemy już zbiór nie należący do $\mathbf{U}$ i że każdy zbiór tej rodziny jest nadzbiorem pewnego zbioru minimalnego), nie ma też maksymalnych zbiorów w rodzinie zbiorów nie należących do $\mathbf{U}$.

Ale problem abstrakcyjnego już przydziału zamków i kluczy i tu ma zarówno matematyczny sens, jak i rozwiązanie, które bez kłopotu przeniesiemy z bardziej praktycznie ujętego zadania C.

Rozwiązanie zadania F12:
Przez kondensator płynie prąd o natężeniu:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{VS}{(\varrho_1 d_1 + \varrho_2 d_2)},$$

gdzie S jest powierzchnią okładek kondensatora.
Prawo Ohma w ujęciu molekularnym (patrz *Fizyka dla klasy II*, 1969, s. 150) przestawia związek pomiędzy natężeniem pola elektrycznego w danym punkcie E a gęstością prądu w tym punkcie (natężenie prądu przypadające na jednostkę powierzchn prostopadłej do kierunku prądu).
Mianowicie:

$$E = \varrho \frac{I}{S}.$$

Stąd otrzymujemy związek dla natężenia pola elektrycznego w obu warstwach dielektryka:

$$E_1 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} E_2.$$

Widać, że natężenie pola jest różne w obu warstwach. Gęstości powierzchniowe ładunku na okładkach kondensatora będą różne i wyniosą odpowiednio:

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 \quad \text{i} \quad \sigma_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2$$

(ε_0 — przenikliwość elektryczna próżni).
„Brakujący" ładunek zgromadzi się na powierzchni rozdzielającej obie warstwy dielektryka z gęstością powierzchniową σ:

$$\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 = \varepsilon_0(\varepsilon_1 E_1 - \varepsilon_2 E_2) =$$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_1 \varrho_1 - \varepsilon_2 \varrho_2)\frac{E_1}{\varrho_1}.$$

Ponieważ

$$\frac{E_1}{\varrho_1} = \frac{I}{S} = \frac{V}{\varrho_1 d_1 + \varrho_2 d_2},$$

więc

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 V(\varepsilon_1 \varrho_1 - \varepsilon_2 \varrho_2)}{\varrho_1 d_1 + \varrho_2 d_2}.$$

Ładunek nie zgromadzi się na granicy dwu dielektryków tylko wówczas, gdy parametry ośrodków spełniają związek

$$\varepsilon_1 \varrho_1 = \varepsilon_2 \varrho_2.$$