O potrzebie aksjomatycznego ujmowania teorii matematycznych

Mgr Robert HAJŁASZ

Załóżmy, że nigdy nic nie słyszeliśmy o teorii mnogości, czyli o teorii zbiorów, i załóżmy również, że nigdy nic a nic nie słyszeliśmy o jakichkolwiek aksjomatach. Startując z tej pozycji — rzec można zerowej — postanawiamy sami stworzyć tę teorię.

Wobec tak przyjętych założeń narzuca się nam tylko jedna droga, którą możemy ruszyć. Jest to droga naturalna, czyli wskazywana przez intuicję. Ruszymy tą drogą, a niebawem zobaczymy, jak z tej drogi trzeba czym prędzej zawrócić, bo prowadzi ona w przepaść, nieco ściślej: w sprzeczność. I wtedy to zobaczymy wyraźnie potrzebę aksjomatycznego ujmowania teorii matematycznych.

A więc zaczynamy.

Rozumujemy tak: Nad pojęciem zbioru nie ma co się zatrzymywać. Jest ono nie tylko dla nas, ale nawet i dla dzieci całkowicie zrozumiałe, nie budzi żadnych wątpliwości. Przecież niejednokrotnie rozważaliśmy w życiu codziennym zbiór książek, zbiór ludzi, zbiór liczb naturalnych, zbiór liczb parzystych, zbiór prostych itp. I wszystko było dla nas jasne. Nie ma również potrzeby zatrzymywać się nad pojęciem przynależności elementu, tj. przedmiotu do zbioru, bo to pojęcie rozumiemy już od dziecka.

A zatem podsumowując stwierdzamy, że takie dwa powiedzenia, jak

X jest zbiorem,

x jest elementem zbioru X

są dla nas całkowicie zrozumiałe, nie budzą żadnych wątpliwości i dlatego nad nimi nie będziemy się zatrzymywać. Czas więc przystąpić do wnioskowania, do formułowania jakichś tez, do budowania teorii. Zanim jednak przejdziemy do wnioskowania, wprowadzimy dla prostszego sposobu porozumiewania się pewne umowy.

Tak więc wyrażenie

x jest elementem zbioru X

będziemy zapisywać symbolicznie:

$$x \in X,$$

zaś wyrażenie

x nie jest elementem zbioru X

zapiszemy za pomocą symbolu:

$$x \notin X.$$

Jeśli elementami zbioru X będą elementy $x_1, x_2, \ldots$, zapiszemy to za pomocą rysunku:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots\}.$$

A teraz przejdziemy do wnioskowania. Zaczniemy od następujących rozważań.

Niech X_0 będzie zbiorem stolic.
Możemy zatem napisać:
X_0 = zbiór stolic = {Paryż, Londyn, ...}.
Tu nie może wystąpić X_0, bo gdyby przypuścić, że występuje, to otrzymalibyśmy, że X_0, czyli zbiór stolic, jest stolicą. A z tym się nie zgadzamy.
Zatem prawdziwe jest zdanie

$$X_0 \notin X_0.$$

Niech X_1 będzie zbiorem planet.
Możemy zatem napisać:
X_1 = zbiór planet = {Wenus, Jowisz, ...}.
Tu nie może wystąpić X_1, bo gdyby przypuścić, że występuje, to otrzymalibyśmy, że X_1, czyli zbiór planet, jest planetą. A z tym się nie zgadzamy.
Zatem prawdziwe jest zdanie

$$X_1 \notin X_1.$$

Rozważmy teraz funkcję zdaniową jednej zmiennej X:

$$X \notin X.$$

Funkcja ta jest spełniona przez X_0, czyli zbiór stolic, oraz przez X_1, czyli zbiór planet.

Nietrudno zauważyć, że elementów spełniających tę funkcję zdaniową jest o wiele więcej. Intuicja mówi nam, że można pomyśleć o zbiorze wszystkich elementów spełniających ową funkcję zdaniową. Innymi słowy, intuicja mówi nam, ze istnieje zbiór wszystkich elementów spełniających tę funkcję zdaniową.

Niech Z będzie tym zbiorem.

Wtedy mamy: W worku Z znajdują się wszystkie elementy spełniające funkcję zdaniową $X \notin X$.

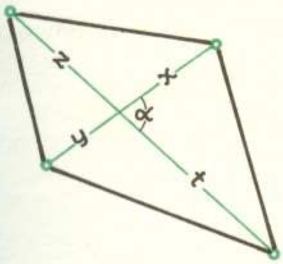
Fakt ten daje się opisać formalnie jak następuje: Dla każdego X_α

(1) $$X_\alpha \in Z \Leftrightarrow X_\alpha \notin X_\alpha \quad .$$

A teraz na dwoje babka wróżyła: albo Z znajduje się w worku, albo nie.

Przypuśćmy, że Z znajduje się w worku. Wtedy prawdą jest, że $Z \in Z$. Skoro zaś prawdą jest, że $Z \in Z$, to na podstawie (1), podstawiając Z zamiast X_α i czytając (1) z lewej do prawej, otrzymujemy, że prawdą też jest, iż $Z \notin Z$; a więc otrzymujemy sprzeczność.

Rozwiązanie zadania M35:
Zauważmy najpierw, że pole S czworokąta wypukłego o przekątnych długości d_1 i d_2 i kącie między przekątnymi α jest równe $\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$. Mamy bowiem (zob. rysunek):



$$S = \frac{1}{2} xt \sin\alpha + \frac{1}{2} ty \sin(180^\circ - \alpha) +$$

$$+ \frac{1}{2} yz \sin\alpha + \frac{1}{2} zx \sin(180^\circ - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} xt \sin\alpha + \frac{1}{2} ty \sin\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} yz \sin\alpha + \frac{1}{2} zx \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2} (x+y)(z+t) \sin\alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha.$$

(Korzystaliśmy z tego, że pole trójkąta jest równe połowie iloczynu dwóch boków przez sinus kąta między nimi zawartego).
Tezą zadania jest więc nierówność

$$\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha \leqslant \frac{1}{4} (d_1^2 + d_2^2),$$

czyli

$$0 \leqslant d_1^2 - 2d_1 d_2 \sin\alpha + d_2^2.$$

Mamy $d_1^2 - 2d_1 d_2 \sin\alpha + d_2^2 =$
$= (d_1+d_2)^2 + 2d_1 d_2 (1-\sin\alpha) \geqslant 0$
gdyż $(d_1-d_2)^2 \geqslant 0$ i $1-\sin\alpha \geqslant 0$,
$d_1 > 0$, $d_2 > 0$.
Z popyższego rozumowania wynika również, kiedy pole czworokąta wypukłego równe jest $\frac{1}{4}$ sumy kwadratów długości przekątnych. Jest tak mianowicie tylko wtedy, gdy $d_1 = d_2$ i $\sin\alpha = 1$, tzn. gdy przekątne są prostopadłe i równej długości.

Zatem przypuszczenie, że Z znajduje się w worku, należy odrzucić, gdyż prowadzi do sprzeczności.
Skoro Z nie znajduje się w worku wnosimy automatycznie, że Z znajduje się poza workiem, i nie ma potrzeby sprawdzania tego. Zabawmy się jednak w upartych kontrolerów i sprawdźmy po swojemu, czy rzeczywiście Z znajduje się poza workiem.
Przypuśćmy więc, że Z znajduje się poza workiem. Wtedy prawdą jest, że $Z \notin Z$. Skoro zaś prawdą jest, że $Z \notin Z$, to na podstawie (1), podstawiając Z zamiast X_α i czytając (1) z prawej do lewej, otrzymujemy, że prawdą też jest, iż $Z \in Z$; a więc otrzymujemy sprzeczność.
Zatem przypuszczenie, że Z znajduje się poza workiem, należy odrzucić, bo prowadzi do sprzeczności.
Ostatecznie wykazaliśmy, że Z nie może być ani w worku, ani poza nim! Zatem kontrola, która wydawała się zbyteczna, była potrzebna, dała zadziwiający rezultat.
A jak wytłumaczyć stwierdzony fakt, że Z nie ma ani w worku, ani poza nim, że źle babka wróżyła, wróżąc na dwoje?
Po prostu tym, że Z nie istnieje.
A zatem, jeśli weźmiemy funkcję zdaniową $X \notin X$, to istnieją elementy spełniające tę funkcję zdaniową, np. X_0 = zbiór stolic, X_1 = zbiór planet, ale nie istnieje zbiór wszystkich elementów spełniających tę funkcję zdaniową. (Niesamowite!).

Okazuje się więc, że wbrew temu, co sądziliśmy na początku, zachodzi potrzeba zatrzymania się nad pojęciem zbioru i pojęciem przynależności elementów do zbioru, że nie możemy sobie pozwolić na tworzenie zbiorów z elementów jakich nam się tylko podoba, np. nie możemy sobie pozwolić na utworzenie zbioru z elementów spełniających funkcję zdaniową $X \notin X$.
Wniosek ten jest ciosem wymierzonym w intuicyjne pojmowanie zbioru. Wobec takiej sytuacji trzeba powiedzieć, co to jest zbiór, czyli trzeba podać definicję zbioru, i to taką, ażeby się uchronić od udowodnionej wyżej sprzeczności i od sprzeczności w ogóle.
Tymczasem nie możemy znaleźć takiego zespołu słów, którym by można wyrazić wprost to, co chcemy uznać za zbiór. Skoro nie możemy powiedzieć wprost, co to jest zbiór, więc z konieczności zażądajmy przynajmniej stwierdzenia, jakie własności powinien spełniać twór, który chcemy uznać za zbiór. Własności te wypowiadamy w pewnych zdaniach. Zatem przez zbiór należy rozumieć od tej chwili jakikolwiek twór, który spełnia warunki sformułowane w tych zdaniach. Wobec tego zdania te można uznać za definicję zbioru, ale nie za definicję zwyczajną, bezpośrednią, lecz za definicję uwikłaną, zamaskowaną, niejawną.
Ponieważ w zdaniach tych wypowiadamy łącznie własności zbioru i własności pojęcia przynależności elementu do zbioru, przeto zdania te są zarazem definicją uwikłaną pojęcia zbioru i pojęcia przynależności elementu do zbioru. Od tej pory pojęciami tymi wolno posługiwać się jedynie w ten sposób, na jaki pozwalają te zdania.
Zdania te nazywamy „aksjomatami teorii mnogości''. Mówimy, że zbiór i pojęcie przynależności elementu do zbioru definiujemy „aksjomatycznie''.
Z przytoczonych do tej pory rozważań widać wyraźnie, że zachodzi potrzeba aksjomatycznego ujmowania teorii matematycznych. Aksjomaty stanowią fundament każdej teorii. Osobliwość ich polega na tym, że kryją w sobie nieskończenie wiele twierdzeń, które przez zastosowanie odpowiednich środków wnioskowania dają się z tych aksjomatów wyprowadzić.
Teorię mnogości po raz pierwszy zbudował matematyk niemiecki J. Cantor. Zbudował on teorię mnogości nie w sposób aksjomatyczny, lecz intuicyjny. Wówczas angielski logik B. Russell podał przykład, w którym zastosowane intuicyjne rozumienie zbioru, wydające się niewątpliwie pewne, prowadzi do sprzeczności. Właśnie tę sprzeczność, zwaną „antynomią Russella'', przedstawiliśmy wyżej.
Pierwszym, który podał aksjomaty teorii mnogości, był niemiecki matematyk E. Zermelo.
Czytelnik pragnący zapoznać się z tymi aksjomatami znajdzie je np. w *Zarysie logiki matematycznej* A. Grzegorczyka (1973).

Sylwestrowy mini-konkurs!

Czterej koledzy — Edward, Franciszek, Jerzy i Hubert — poszli razem z żonami do klubu na bal noworoczny. Z początku każdy tańczył ze swoją żoną, ale wkrótce pary się przemieszały. Basia tańczyła z Edwardem, Alicja z mężem Karoliny, Dorota z mężem Alicji, Franciszek z żoną Jerzego i Jerzy z żoną Edwarda. Proszę rozsupłać tę mieszaninę par, podając imiona współmałżonków oraz kto z kim tańczył?