Od szczególnego przypadku do uogólnienia — uzmiennianie stałych (cz. I)

Prof. dr Zofia KRYGOWSKA

W swej książce poświęconej rozwiązywaniu elementarnych zadań matematycznych* G. Polya zaleca „rzut oka wstecz", na drogę, na której uzyskaliśmy rozwiązanie zadania. Pisze on: „Nawet najlepsi uczniowie po otrzymaniu rozwiązania zadania i starannym zapisaniu toku rozumowania zamykają zeszyt i biorą się do czego innego. Postępując tak, opuszczają ważną i pouczającą fazę pracy. Spoglądając wstecz na otrzymane rozwiązanie, ponownie analizując wynik i prowadzącą doń drogę, mogliby utwierdzić swą wiedzę i rozwinąć swoje zdolności do rozwiązywania zadań [...] żaden problem nie jest nigdy wyczerpany całkowicie. Zawsze coś zostaje jeszcze do zrobienia; badając problem dostatecznie wnikliwie, możemy ulepszyć każde rozwiązanie, a w każdym razie zawsze udoskonalić nasze rozumowanie rozwiązania".

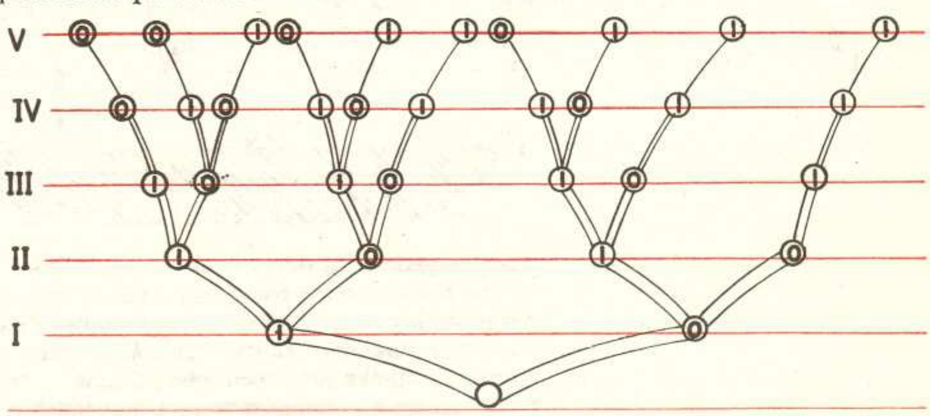
„Rzut oka wstecz" może nie tylko ułatwić nam lepsze rozumienie otrzymanego rozwiązania, ale także często pozwala dojrzeć w zastosowanym — w szczególnym przypadku — postępowaniu pewnej ogólniejszej metody o znaczeniu szerszym. Może nam ukazać to, co sprzyjało uzyskaniu rozwiązania i co je hamowało. Może zwrócić uwagę na błędy metodyczne, których należałoby unikać. „Rzut oka wstecz" to ważna faza pracy na każdym poziomie uczenia się matematyki oraz rozwiązywania problemów matematycznych — i tych elementarnych, dostępnych dla ucznia szkoły podstawowej, i tych „wielkich", stanowiących temat pracy twórczej matematyków. Jeden z najwybitniejszych matematyków francuskich pierwszej połowy naszego wieku, Henri Lebesgue (1875–1941), powiedział w toku dyskusji na kongresie w r. 1937: „To, czego dokonałem w matematyce, było naturalnym i czasem natychmiastowym rezultatem rozważania przyczyn tego czy innego sukcesu, tej czy innej porażki, badania powodów mocy lub niemocy tej czy innej idei, i wyobrażam sobie, że tak było u każdego z nas".

W kolejnych dwóch artykułach przeanalizujemy na dwóch różnych przykładach drogi rozumowania prowadzące od konkretnego numerycznego przypadku do ogólnego twierdzenia z punktu widzenia „mocy czy niemocy" rozwiązania zadania w szczególnym przypadku oraz sposoby wykorzystania tego rozwiązania dla rozwiązania problemu ogólniejszego. Będą to tylko przykłady; zagadnienie wymagałoby bardzo szerokiego omówienia, można by mu poświęcić całą książkę.

Przykład I

Rozporządzamy pięcioma ponumerowanymi pudełkami oraz trzema jednakowymi żetonami. Żetony układamy w pudełkach (w pudełku najwyżej jeden żeton). Iloma różnymi sposobami można rozmieścić żetony w pudełkach?

Zadanie rozwiążemy budując „drzewo wszystkich możliwości". Poszczególne poziomy odpowiadają kolejnym pudełkom, liczba 1 zapisana w węźle gałązki sygnalizuje, że w pudełku o danym numerze umieściliśmy żeton, liczba 0 — że pudełko to jest puste. Pamiętamy, że należy zapełnić tylko trzy pudełka, a dwa pozostawić puste. Oto nasze drzewo.



Mamy więc 10 możliwych rozmieszczeń trzech żetonów w pięciu pudełkach, co zapiszemy symbolicznie $\binom{5}{3} = 10$.

*G. Polya, *Jak to rozwiązać?*, PWN, 1964.

Następne zadanie: Iloma sposobami można rozmieścić dwa żetony także w pięciu pudełkach? Pierwsza nasza myśl — to zbudować nowe drzewo. Czy to konieczne? Czy nie możemy wykorzystać drzewa zbudowanego poprzednio? Każda gałązka przedstawia rozmieszczenie, w którym trzy pudełka są pełne (trzy jedynki) i dwa puste (dwa zera). Teraz chcemy mieć dwa pudełka pełne i trzy puste. A więc? Wystarczy zmienić kod — to samo drzewo da nam rozwiązanie naszego nowego zadania, jeżeli symbol 0 odczytamy jako wskazówkę, że w pudełku o danym numerze umieszczamy żeton, symbol 1 jako wskazówkę, że pudełko o danym numerze ma być puste. Liczba gałązek się nie zmieni przez zmianę kodu, zatem

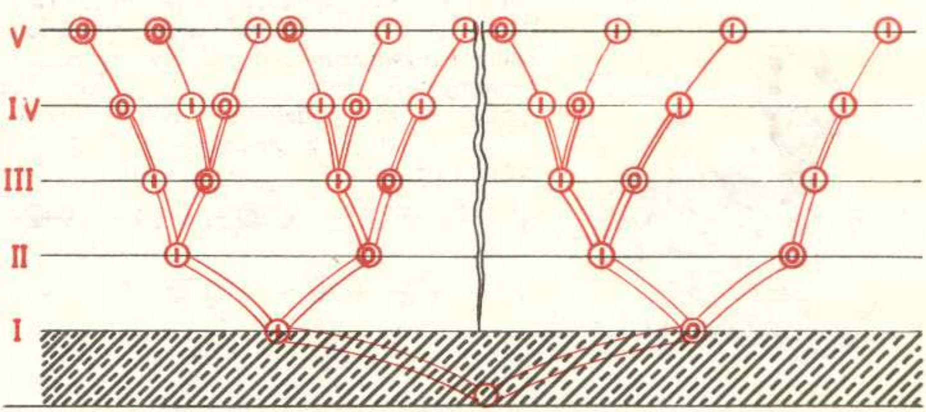
$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10.$$

Dlaczego udało się nam wykorzystać to samo drzewo dwukrotnie do rozwiązania różnych zadań numerycznych? Oczywiście dlatego, że zadania te miały charakter „dualny": liczba pudełek pustych w jednym przypadku była równa liczbie pudełek pełnych w drugim, i na odwrót. Ważne było to, że $2 = 5-3$.
Czy istotne były te dane numeryczne, czy związki między nimi? Popatrzmy na nasze drzewo. Możemy je budować w górę lub obcinać od góry zmieniając liczbę pudełek. Możemy zmieniać liczbę jedynek i zer w poszczególnych gałązkach, zmieniając liczbę żetonów. Ale każde takie drzewo możemy interpretować dualnie, raz odczytując znak 1 jako wskazanie, że dane pudełko jest pełne, znak zaś 0 — że jest puste, drugi raz odczytując te znaki w sensie przeciwnym. A zatem, gdy posiadamy n pudełek i k żetonów (zakładamy na razie $0 < k < n$), mamy tyle samo możliwych rozmieszczeń, co mając n pudełek i $n-k$ żetonów;

zapiszemy symbolicznie ten fakt: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Wykorzystamy obserwację naszego drzewa jeszcze głębiej. Usuńmy pierwsze piętro. Co otrzymamy? Jak możemy zinterpretować nową sytuację? Nasze drzewo rozpadło się na dwa drzewa. Jedno — wyrastające z węzła, który poprzednio oznaczyliśmy pierwszym od dołu znakiem 1 — przedstawia wszystkie możliwe rozmieszczenia dwóch ($3-1 = 2$) żetonów w czterech ($5-1 = 4$) pudełkach, drugie — wyrastające z pierwszego od dołu węzła oznaczonego znakiem 0 — przedstawia wszystkie możliwe rozmieszczenia trzech żetonów w czterech ($5-1 = 4$) pudełkach. Ale suma liczb gałązek obu tych drzew jest równa liczbie

gałązek pierwotnego drzewa, a zatem $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$.



Jak poprzednio, możemy oderwać się od konkretnie zadanych numerycznie liczb i pomyśleć o drzewie rozmieszczeń k żetonów w n pudełkach. Gdy usuniemy najniższe piętro, rozpadnie się ono na dwa drzewa, jedno — przedstawiające wszystkie możliwe rozmieszczenia $k-1$ żetonów w $n-1$ pudełkach (usuwamy pierwsze pudełko już zapełnione), drugie — przedstawiające wszystkie możliwe rozmieszczenia k żetonów w $n-1$ pudełkach (usuwamy pierwsze pudełko puste). Odkrywamy ogólne twierdzenie, przyjmując na razie $1 < k < n-1$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Od tych założeń możemy się uwolnić. Oczywiście, gdy $n \neq 0$ i $n = k$, mamy tylko jedno rozmieszczenie (wszystkie pudełka pełne). Jeżeli $n \neq 0$ i $k = 0$, to nie mamy w ogóle żetonów, możemy przyjąć, że i wtedy istnieje jedno możliwe rozmieszczenie (wszystkie pudełka puste). Jeżeli $n = k = 0$, umówimy się, że mamy też jedno możliwe rozmieszczenie. Łatwo sprawdzić, iż wtedy

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{dla } 0 \leqslant k \leqslant n$$

oraz

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{dla } 0 < k < n.$$

Poniższa tabela pokazuje zastosowanie otrzymanych wzorów (trójkąt Pascala) do kolejnego obliczenia liczby wszystkich możliwych rozmieszczeń żetonów w pudełkach, przy danych liczbach żetonów i pudełek. Otrzymane ogólne wzory mają charakter rekurencyjny, tabelę możemy dowolnie przedłużać i odpowiednio rozszerzać.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	1+1 = 2	1				
3	1	1+2 = 3	2+1 = 3	1			
4	1	1+3 = 4	3+3 = 6	3+1 = 4	1		
5	1	1+4 = 5	4+6 = 10	6+4 = 10	4+1 = 5	1	
...	...	...	...	...	...	...	...

Czytelnik znający elementy kombinatoryki zdziwi się może, że zagadnienia traktowane gdzie indziej z całą powagą „wielkiego" aparatu matematycznego, z zastosowaniem indukcji zupełnej, omawialiśmy w sposób poglądowy, może nawet naiwny. Ale przedstawione rozumowanie zasługuje na wnikliwe spojrzenie wstecz właśnie ze względu na interesujący nas problem roli konkretnego, szczególnego przypadku w odkrywaniu ogólnych twierdzeń. Nasze drzewo budowaliśmy w intencji rozwiązania zadania z danymi numerycznymi ściśle określonymi. Liczby 5 i 3 wyraźnie decydowały o kształcie drzewa. Ale w dalszym ciągu wykorzystaliśmy to drzewo inaczej. Uzmienniliśmy — jak się mówi — stałe 5 i 3 oraz mogliśmy bezpośrednio przejść od równości $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$ i $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$ do ogólnych wzorów

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{i} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

dlatego, że nasze rozumowanie w przypadku szczegółowym stawało się przez to „uzmiennienie" poprawnym rozumowaniem ogólnym i w istocie rzeczy nie różniło się od rozumowania ogólnego. Przykład szczególny może w ten sposób prowadzić do uogólnienia, jeżeli dobrze uświadomimy sobie, z jakich założeń korzystaliśmy rozwiązując zadanie, jeżeli wnikliwie prześledzimy drogę rozumowania, rachunek, konstrukcję, którą zastosowaliśmy, jeżeli postawimy sobie przy tym spojrzeniu wstecz właściwe pytania (jak to, co już mam, mógłbym jeszcze w sposób ogólniejszy wykorzystać?), jeżeli zastosujemy, jak w opisanym przypadku, próbę uzmiennienia stałych.
W następnym artykule uzupełnimy te uwagi prześledzeniem drogi rozumowania od przypadku szczególnego do uogólnienia — na innym przykładzie.