Sztuka wygrywania

Mgr Tadeusz B. IWIŃSKI

Profesor S. zażądał przed laty usunięcia z tematów ustnego egzaminu wstępnego z matematyki pewnego zadania z zegarkiem w roli głównej: „Pojęcie «zegarek» do matematyki nie należy i nie mamy prawa na egzaminie z tego przedmiotu żądać od kandydata jakiejkolwiek wiedzy o zegarkach" — uzasadnił.

Omawialiśmy dotychczas problemy trapiące Leśników i Drzewiarzy, troszczyliśmy się o dochody Działkowicza i odzieraliśmy z wszelkiego uroku pewną grę w zapałki. Jak by na sprawę nie patrzeć — nie były to zagadnienia dające się bezpośrednio i w całości zaliczyć do matematyki (patrz obok). Siła matematyki polega jednak między innymi właśnie na tym, że pozwala ona ogołocić pewne problemy czysto praktyczne z całej fabuły, rozwiązać je w sferze czystej abstrakcji, a otrzymane rozwiązanie z powrotem przetłumaczyć na język praktyki. Niezwykle często okazuje się przy tym, że otrzymane rozwiązanie daje się zastosować do znacznie szerszej klasy problemów niż ten, który był rozwiązywany.

Odłożywszy więc na przyszłość rozstrzygnięcie problemu, czy i jak często opłaca się blefować w pokerze, zajmiemy się tym razem wyłącznie matematyką:

Krótki kurs gier 2×2

„Grą 2×2" nazywamy opis takiej sytuacji konfliktowej, w której każda ze stron dysponuje dwiema strategiami. Wyborów strategii gracze nie uzgadniają i dokonują ich niezależnie. Ostateczny rezultat gry, zwany wypłatą, zależy tylko od tego, jaka para strategii została wybrana. Zakładamy przy tym, że wypłaty przekazują sobie gracze: wygrana jednego jest jednocześnie przegraną drugiego. Wszystkie informacje o grze zawarte są w „macierzy wypłat" — tabelce podającej, jakie wypłaty pierwszego gracza przyporządkowane są każdej z czterech możliwych par strategii. Na rysunku obok symbole A_i, B_j oznaczają strategie graczy; symbole a, b, c i d — wypłaty dla gracza A. Wypłatami dla gracza B są, zgodnie z założeniem, liczby przeciwne: $-a$, $-b$, $-c$ i $-d$.

Gracz B

Gracz A

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}$$

Rozwiązanie gry polega na wskazaniu każdemu z graczy takiej strategii, która zapewnia mu największą, możliwą do osiągnięcia wypłatę — przy założeniu, że jego przeciwnik też gra bezbłędnie.

Sposób budowania rozwiązania gry zależy od postaci macierzy wypłat. Rozwiązanie jest szczególnie proste w wypadku, gdy jeden z graczy dysponuje **strategią dominującą**. W pierwszym z podanych obok przykładów strategię taką posiada gracz A: zastosowanie strategii A_1 daje mu większą wypłatę niż zastosowanie strategii A_2, niezależnie od tego, co zrobi przeciwnik. Zatem A na pewno nie stosuje strategii dominowanej A_2. Wiedząc to, gracz B nie może zastosować swej strategii B_1, która przynosi mu przegraną 3. Rozwiązaniem gry jest więc para strategii (A_1, B_2): gracz A musi przegrać 1. W drugim z przykładów strategia B_2 jest dominowana przez B_1 (pamiętamy, że wypłaty gracza B są liczbami przeciwnymi do umieszczonych w macierzy wypłat dla A). Rozwiązaniem gry jest więc para złożona z dominującej strategii gracza B i najlepszej obrony gracza A para (A_2, B_1). Wynikiem gry jest wygrana 1 gracza A.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zupełnie inaczej wygląda sprawa w takich grach 2×2, które nie posiadają strategii dominującej. Żadna para strategii nie jest rozwiązaniem takiej gry (zadanie 1).

Tu krótka dygresja. Uważny Czytelnik «Delty» zauważył zapewne, że w matematyce na ogół jest tak, iż jeśli czegoś nie ma, to się to coś szybko konstruuje: w zbiorze liczb wymiernych były dziury — zatkano je liczbami niewymiernymi («Delta» nr 1); liczby rzeczywiste nie pozwalały rozwiązać równania $x^2 = -1$, skonstruowano więc urojonego sprzymierzeńca («Delta» nr 3); istnieją funkcje ciągłe nie posiadające pochodnej w żadnym punkcie — skonstruowano więc teorie pozwalające „różniczkować" nawet funkcje nieciągłe («Delta» nr 4).

W teorii gier postąpiono podobnie: skoro nie każda — taka nawet jak tu rozważane — prosta gra posiada parę strategii stanowiących rozwiązanie, trzeba było tak rozszerzyć pojęcie strategii, by wyeliminować to zasmucające zjawisko. Wprowadzono więc pojęcie strategii mieszanych. Formalnie biorąc strategia mieszana w grze 2×2 jest parą liczb $(x, 1-x)$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Interpretacja strategii mieszanej bywa, jak widzieliśmy, różna. W grze „Morra" («Delta» nr 6) liczby x oraz $1-x$ oznaczały częstości, z jakimi gracz stosuje odpowiednio swą pierwszą i drugą strategię przy wielokrotnym rozgrywaniu. W problemie Działkowicza («Delta» nr 4) strategia mieszana interpretowana była jako częściowe zastosowanie każdej z dwu strategii (w pojedynczej rozgrywce). Możliwe są inne jeszcze interpretacje tego pojęcia. Podstawowe (i jedyne) założenie dotyczące strategii mieszanych jest następujące: jeśli gracz stosuje strategię mieszaną $(x, 1-x)$, to otrzymuje za nią część x ($x \in \langle 0, 1 \rangle$) wypłaty wynikającej z zastosowania strategii pierwszej i część $1-x$ wypłaty wynikającej z zastosowania strategii drugiej

Strategię mieszaną można np. rozumieć jako rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze strategii.

(założenie takie przyjmowaliśmy milcząco zarówno w przykładzie Działkowicza, jak i gry „Morra"). Z założenia tego łatwo wnioskujemy, że jeśli gracz A zastosuje strategię $(x, 1-x)$, a gracz B — strategię $(y, 1-y)$, to wynikająca z zastosowania tych strategii wypłata dla A wyniesie:

$$w(x, y) = axy+bx(1-y)+c(1-x)y+d(1-x)(1-y).$$

Sformułowana powyżej definicja rozwiązania gry nie traci sensu przy takim rozszerzeniu pojęcia strategii i pojęcia wypłaty, można więc dalej pytać o istnienie rozwiązania; okazuje się przy tym, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Podstawowe twierdzenie teorii gier 2×2. *Każda gra posiada rozwiązanie* (w strategiach mieszanych).

Szkic dowodu: Dla gier posiadających strategię dominującą twierdzenie jest już udowodnione. Jeśli gra nie posiada strategii dominującej, to strategią optymalną gracza A jest $(p, 1-p)$, gdzie

$$p = \frac{d-c}{a+d-b-c},$$

a optymalną strategią gracza B jest $(q, 1-q)$, gdzie

$$q = \frac{d-b}{a+d-b-c}.$$

Pozostaje sprawdzić, że wskazana para strategii rzeczywiście jest rozwiązaniem. Sprawdzenie to jest treścią zadań 3 i 4. (Można też dowodzić inaczej — metodą analogiczną do zastosowanej przy rozwiązywaniu problemu Działkowicza).

Twierdzenie to załatwia w zasadzie całą teorię gier 2×2, ponieważ umożliwia nam rozwiązanie każdej takiej gry. Można jednak spróbować rozszerzyć tę teorię odrzucając na przykład założenie, że obaj gracze grają bezbłędnie. Można by wtedy spróbować rozstrzygnąć zagadnienie, które w podręcznikach teorii gier nie jest na ogół omawiane: jak wygrywać na błędach przeciwnika. Problemem tym — niezwykle interesującym z praktycznego punktu widzenia — postaramy się zająć w przyszłości.

Zadania

1. W pierwszym odcinku „sztuki wygrywania" (Delta» nr 2) wprowadziliśmy pojęcie strategii minimaksowych. Wiemy również, że jeśli strategie minimaksowe są w równowadze, to stanowią one rozwiązanie gry. Udowodnić, że jeśli w grze 2×2 strategie minimaksowe są w równowadze, to co najmniej jeden z graczy posiada strategię dominującą, a jest nią strategia minimaksowa.
2. Udowodnić, że jeśli gra 2×2 nie posiada rozwiązania w strategiach czystych, to $a+d \neq b+c$.
3. Sprawdzić, że strategia $(p, 1-p)$ gracza A (p — zdefiniowane w tekście) daje graczowi A wypłatę $v = \dfrac{ad-bc}{c+d-b-c}$ niezależną od tego, jaką strategię $(y, 1-y)$ stosuje gracz B. Wykazać również, że $w(x, q) = v$ niezależnie od tego, jaką strategię $(x, 1-x)$ stosuje gracz A.
4. Z wyników zadania 3 wywnioskować, że para strategii mieszanych $(p, 1-p)$ i $(q, 1-q)$ jest rozwiązaniem gry.

Rozwiązania na str. 13.

Problem

Zbudować algorytm (por. *Algorytmy* A. Skowrona) rozwiązywania gier 2×2. Prosimy o nadsyłanie pomysłów.

Pomysł

Jak wyznaczyć czas trwania błysku lasera impulsowego? Odpowiedź jest bardzo prosta. Istnieją szybkie układy elektroniczne i odpowiednie oscylografy pozwalające na rejestracje zdarzeń trwających kilka nanosekund (1 ns = 10^{-9} s). Co jednak zrobić jeżeli w pracowni nie ma akurat potrzebnego przyrządu? Kupić — nie zawsze można zrealizować szybko zamówienie, pożyczyć — też jest to kłopotliwe. W tej sytuacji dobry pomysł pozwala czasem na pokonanie nieprzezwyciężonych na pozór trudności.

Oto historia z Zakładu Optyki Instytutu Fizyki Doświadczalnej UW. W połowie 1973 r. uruchomiono barwnikowy laser impulsowy (patrz «Delta» — 9). Dr Jerzy Krasiński i mgr Stanisław Majewski chcieli określić od razu długość trwania impulsu. Spodziewali się czasów trwania rzędu kilku lub kilkunastu ns. Potrzebnego urządzenia nie było pod ręką, mieli natomiast aparat fotograficzny, parę zwierciadeł, centymetr krawiecki oraz metalowy pręt. To wystarczyło. Pomyślcie przez chwilę, zanim przeczytacie na czym pomysł polegał (c.d. na str. 11).

Rozwiązanie zadania M. 29

Niech funkcje f i g spełniają warunek $f(x)+f(a-x) = xg(x)$ dla każdego x.
W szczególności dla $x = 0$ i dla $x = a$ otrzymujemy $f(0)+f(a) = 0$, $f(a)+f(0) = ag(a)$.
Z tych dwóch równości wynika $ag(a) = 0$ i wobec $a \neq 0$ otrzymujemy $g(a) = 0$.