Program maszyny składa się z 6 instrukcji:

$$q_0 s_0 1 q_2, \quad q_0 0 1 q_1, \quad q_0 1 0 q_2, \quad q_1 0 P q_1, \quad q_1 1 P q_1, \quad q_2 0 P q_0.$$

Przypuśćmy np., że wejściem maszyny jest ciąg 1010. Stany maszyny i symbole na taśmie są wówczas następujące („tłusta" czcionka oznacza pole wyróżnione):

$$(1)\ 1010\,q_0, \quad (2)\ 1011 q_1, \quad (3)\ 1011 q_1, \quad (4)\ 1011 q_1, \quad (5)\ 1011 q_1, \quad (6) s_0\, 1011 q_1.$$

Jeśli natomiast wejściem jest ciąg 1111, to działanie maszyny przebiega następująco:

$$(1)\ 1111 q_0, \quad (2)\ 1110 q_2, \quad (3)\ 1110 q_0, \quad (4)\ 1100 q_2, \quad (5)\ 1100 q_0,$$
$$(6)\ 1000 q_2, \quad (7)\ 1000 q_0, \quad (8)\ 0000 q_2, \quad (9)\ s_0\, 0000 q_0, \quad (10)\ 10000 q_2.$$

Podany tu przykład jest niezwykle prosty i nie daje pełnego świadectwa tego, co maszyna Turinga może naprawdę zdziałać. Czytelnik, który chciałby się nauczyć, jak z prostych czynności wykonywanych przez maszyny Turinga można składać działania coraz bardziej złożone, musiałby zwrócić się do łatwo zresztą dostępnych opracowań poważniejszych (zob. np. B. A. Trahtenbrot, *Algorifmy i wyczislitelnyje awtomaty*, Moskwa 1974). Jakkolwiek jednak złożone będzie działanie wykonywane przez maszynę Turinga, będzie ono miało zawsze charakter algorytmiczny: wykonanie go nie będzie wymagało inteligencji, lecz tylko uwagi i ścisłego przestrzegania instrukcji.

W dotychczasowej części artykułu staraliśmy się być bardzo dokładni. W dalszej części, w której nie możemy już prowadzić wykładu tak ściśle, postaramy się opowiedzieć, jak można skonstruować zadanie rachunkowe, dla którego nie istnieje rozwiązanie przy pomocy maszyny Turinga.

Równania różniczkowe

Dr Henryk KOŁAKOWSKI

Każdy z czytelników spotkał się niejednokrotnie z równaniami algebraicznymi postaci:

$$(1) \qquad f(x, y) = 0,$$

gdzie f jest funkcją rzeczywistą określoną na prostokącie $\Omega = \{(x, y): a < x < b, c < y < d\}$, tzn. funkcją, która każdej parze liczb $(x, y) \in \Omega$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $f(x, y)$. Rozwiązaniem równania (1) nazywa się w szkole każdą parę liczb $(p, q) \in \Omega$ spełniającą warunek:

$$f(p, q) = 0.$$

Można na to spojrzeć inaczej: rozwiązaniem równania (1) będziemy nazywali funkcję

$$y = y(x)$$

określoną na pewnym zbiorze $I \subset (a, b)$, spełniającą warunki:

$$\text{jeśli} \quad x \in I, \quad \text{to} \quad (x, y(x)) \in \Omega,$$
$$\text{jeśli} \quad x \in I, \quad \text{to} \quad f(x, y(x)) = 0.$$

Równaniem typu (1) jest na przykład równanie liniowe

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie A, B, C są liczbami rzeczywistymi i $B \neq 0$. Wówczas jedynym rozwiązaniem jest funkcja

$$y = \frac{-Ax - C}{B}.$$

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x \in (-1, 1), \quad y \in (-1, 1).$$

Spośród rozwiązań określonych na $I = (-1, 1)$ ciągłe są dwa:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{oraz} \quad y = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Po tym krótkim wstępie przejdziemy do omówienia najprostszych równań różniczkowych.

Definicja: *Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego* nazwiemy równanie:

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

gdzie f jest funkcją określoną na prostokącie Ω.

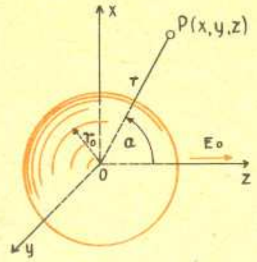
Rozwiązaniem równania (2) nazywamy każdą funkcję $y = y(x)$ różniczkowalną w przedziale I, której wykres leży w zbiorze Ω i która spełnia warunek (2), to znaczy:

$$\text{jeśli} \quad x \in I, \quad \text{to} \quad \frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)).$$

Krzywą $y = y(x)$, $x \in I$ nazywamy krzywą całkową równania (2).

Rozwiązanie zadania F 10

Wprowadźmy układ współrzędnych o początku w środku kuli i z osią z skierowaną równolegle do kierunku jednorodnego pola E_0 (patrz rysunek).



Szukamy powierzchni ekwipotencjalnych pola elektrostatycznego będącego sumą pól: dipola elektrycznego w momencie dipolowym p skierowanym wzdłuż osi z, umieszczonego w początku układu współrzędnych, i jednorodnego pola E_0.

Potencjał pola dipola w dowolnym punkcie P odległym o r od dipola wynosi (z dokładnością do stałej):

$$V_d(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pz}{r^3},$$

gdzie z jest z-ową współrzędną punktu P, a ε_0 — stałą dielektryczną próżni. Potencjał pola jednorodnego równa się (z dokładnością do stałej):

$$V_j(P) = -E_0 z.$$

Całkowity potencjał rozważanego pola elektrostatycznego w punkcie P wynosi:

$$V(P) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{r^3} - E_0\right) z + V_0,$$

gdzie V_0 jest stałą, skalującą wartość potencjału. Ze względu na walcową symetrię problemu wygodnie jest wprowadzić kąt θ zdefiniowany jako kąt między prostą OP i osią z, liczony od osi. Wówczas: $z = r\cos\theta$ i

$$V(P) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3} - E_0\right) r\cos\theta + V_0.$$

Z powyższego wzoru wynika, że powierzchnia kuli o promieniu r_0 jest powierzchnią ekwipotencjalną w rozważanym problemie, jeśli

$$p = 4\pi\varepsilon_0 E_0 r_0^3,$$

Czyli nie naładowana kula umieszczona w jednorodnym polu wytwarza na zewnątrz dodatkowe pole, równoważne polu wywoływanemu przez dipol o momencie dipolowym $p = 4\pi\varepsilon_0 E_0 r_0^3$ (wewnątrz kuli pole elektrostatyczne jest równe zeru).

Gęstość powierzchniowa ładunków δ równa się wartości wektora indukcji pola elektrostatycznego: $\delta = |D| = \varepsilon_0|E|$. Linie sił pola są prostopadłe do powierzchni przewodnika, czyli w naszym przypadku są równoległe do promieni kuli.

Dlatego:

$$\delta = \varepsilon_0\left(-\frac{dV}{dr}\right)\Bigg|_{r=r_0} = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta.$$

Gęstość ładunku na powierzchni kuli jest funkcją $\cos\theta$, to znaczy wszystkie punkty leżące na okręgu o promieniu $r\sin\theta$ i osi pokrywającej się z osią z mają taką samą gęstość ładunku. Ładunki dodatnie zgromadzone zostały na prawej półkuli ($\theta < 90^\circ$), natomiast ujemne na lewej ($90^\circ < \theta < 180^\circ$). Największa gęstość ładunku jest dla punktów leżących na osi z.

Uwagi:

1° W teorii równań różniczkowych rozważa się również równania wyższych rzędów. Przykładem *równania różniczkowego zwyczajnego rzędu n* jest

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x) = a(x),$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n, a$ są funkcjami ciągłymi w pewnym przedziale I.

2° Oprócz równań zwyczajnych ważną rolę w zastosowaniach odgrywają *równania różniczkowe cząstkowe*, w których poszukiwana funkcja zależy od dwóch lub więcej zmiennych niezależnych.

3° Potrzeba rozwijania teorii równań różniczkowych wynika między innymi z możliwości opisu wielu zjawisk fizycznych za pomocą takich równań. Np. w ruchu jednostajnie przyspieszonym droga $s = s(t)$, gdzie t oznacza czas, spełnia równość:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = a = \text{const},$$

z której przy założeniu, że $s(0) = \frac{ds(0)}{dt} = 0$, wynika od razu, iż $s(t) = \frac{1}{2}at^2$.

Zauważmy, że rozwiązywanie równania różniczkowego postaci

$$\frac{dy}{dx} = g(x),$$

gdzie g jest funkcją ciągłą w pewnym przedziale, sprowadza się do obliczenia całki nieoznaczonej:

$$y = \int g(x)dx + c.$$

Niech, dla przykładu,

(3) $$\frac{dy}{dx} = x,$$

wówczas $y = \frac{1}{2}x^2 + c$.

Jak widać, przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi krzywa całkowa równania (3).

Nasuwają się tu następujące pytania:

1) Jakie warunki powinna spełniać funkcja $f(x, y)$, aby przez każdy punkt prostokąta Ω przechodziła krzywa całkowa równania (2)?

2) Jakie warunki powinna spełniać funkcja $f(x, y)$, aby przez zadany punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ przechodziła dokładnie jedna krzywa całkowa równania (2)?

Właśnie podanie odpowiedzi na wyżej wymienione pytania to jedno z zadań teorii równań różniczkowych zwyczajnych.

Udowodnimy teraz

T w i e r d z e n i e: *Niech $f\colon (a, b) \to R$ i $g\colon (c, d) \to R$ będą funkcjami ciągłymi, przy czym $g(y) \neq 0$ dla każdego $y \in (c, d)$. Niech F i G oznaczają ustalone funkcje pierwotne dla funkcji f i g i niech $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$.*

Wówczas każde rozwiązanie równania różniczkowego

(4) $$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$$

spełniające warunek $y(x_0) = y_0$ jest rozwiązaniem równania algebraicznego

(5) $$G(y) - G(y_0) - F(x) + F(x_0) = 0,$$

i na odwrót: każde rozwiązanie równania (5) jest rozwiązaniem równania (4).

Dowód: Niech $y = y(x)$ będzie rozwiązaniem równania (4) i niech $y(x_0) = y_0$. Wówczas

$$g(y(x))\frac{dy(x)}{dx} = f(x),$$

czyli $\frac{d}{dx}\big(G(y(x)) - F(x)\big) = 0$, a więc $G(y(x)) - F(x) = c = \text{const}$. Podstawiając $x = x_0$ otrzymujemy stąd $c = G(y_0) - F(x_0)$, co oznacza, że $y = y(x)$ jest rozwiązaniem równania (5).

Niech teraz $y = y(x)$ będzie rozwiązaniem równania (5).

Wówczas

(6) $$G(y(x)) = F(x) - F(x_0) + G(y_0).$$

Ponieważ $\frac{dG(y)}{dy} = g(y) \neq 0$, więc istnieje funkcja G^{-1} odwrotna względem funkcji G. Zatem

(7) $$y(x) = G^{-1}\big(F(x) - F(x_0) + G(y_0)\big).$$

Widać stąd, że $y = y(x)$ jest funkcją różniczkowalną. Różniczkując funkcję

$$h(x) = G(y(x)) - G(y_0) - F(x) + F(x_0)$$

i korzystając z równości (6) otrzymujemy $g(y(x))\frac{dy(x)}{dx} - f(x) = 0$, czyli $\frac{dy(x)}{dx} = \frac{f(x)}{g(y(x))}$.

Z równości (7) wynika na koniec, że $y(x_0) = y_0$.

P r z y k ł a d 1: Znajdźmy krzywą całkową równania

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad (y > 0)$$

przechodzącą przez punkt $(0, 1)$.

Możemy zastosować udowodnione twierdzenie, biorąc $f(x) = -x$ i $g(y) = y$. Jako funkcje pierwotne weźmy $F(x) = -\frac{1}{2}x^2$ i $G(y) = \frac{1}{2}y^2$. Zatem $F(x_0) = F(0) = 0$, $G(y_0) = G(1) = \frac{1}{2}$.

Ze wzoru (5) mamy więc: $\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 = 0$, czyli $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Jedynym rozwiązaniem tego zadania spełniającym warunek $y(0) = 1$ jest funkcja

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{gdzie} \quad x \in (-1, 1).$$

P r z y k ł a d 2: Ciało stałe o masie m zanurzone w cieczy rozpuszcza się z szybkością proporcjonalną do ilości nierozpuszczonej substancji. Niech $y = y(t)$ oznacza masę substancji rozpuszczonej w czasie t. Jaka to funkcja, jeżeli wiadomo, że $y(0) = 0$?

Otóż masa nierozpuszczonej substancji po upływie czasu t jest równa $m - y(t)$, szybkość rozpuszczania wynosi $\frac{dy}{dt}$, a więc funkcja $y = y(t)$ spełnia równanie

$$\frac{dy}{dt} = k(m-y), \quad (k \text{ — współczynnik proporcjonalności}).$$

Czytelnik bez trudu sprawdzi (stosując np. udowodnione wyżej twierdzenie), że jedynym rozwiązaniem naszego zadania jest funkcja $y = m(1-e^{-kt})$.

O dalsze przykłady zagadnień prowadzących do równań różniczkowych nie jest trudno. Zetknąć się można z nimi w wielu dziedzinach nauki i techniki.

Ciekawe — i nie tylko

O trudnościach związanych z uprawianiem fizyki we współczesnym świecie najlepiej mogą świadczyć bardzo skomplikowane urządzenia badawcze, jakimi muszą się posługiwać dzisiejsi uczeni. «Physics Today», nr 1, 1974, przynosi opis dwóch wielkich komór pęcherzykowych — urządzeń służących do rejestracji torów cząstek elementarnych wytworzonych przy pomocy wielkich akceleratorów (komory są więc tylko jednym z ogniw całego łańcucha narzędzi badawczych współczesnego fizyka cząstek elementarnych, łańcucha, który zaczyna się od akceleratora i kończy się dopiero na komputerze). Największa komora europejska w CERN-ie koło Genewy ma 3,7 m średnicy, a tory cząstek są w niej odchylane przy pomocy pola magnetycznego o natężeniu 2T(20 tys. Gausów). Największa komora amerykańska współpracuje z potężnym akceleratorem rozpędzającym protony do energii 300 GeV, znajdującym się w NAL (National Accelerator Laboratory). Komora ta ma kształt gruszki o największym wymiarze 4,5 m. Mieści się w niej, zależnie od potrzeb, 32 000 litrów ciekłego wodoru, mieszanki neonu z wodorem lub deuteru. Cząstki elementarne odchylane są w tej komorze przy pomocy elektromagnesu dającego natężenie pola rzędu 3T(30 tys. Gausów). Aby wytworzyć to pole, należy przez uzwojenie elektromagnesu przepuścić prąd o natężeniu 5 000 A. Cewka elektromagnesu ma 4,2 m średnicy wewnętrznej i 5,1 m średnicy zewnętrznej. Energia zmagazynowana w nim wynosi 400 MJ.

Ten sam numer «Physics Today» przynosi również bardzo interesujący artykuł o falach grawitacyjnych i nowych próbach potwierdzenia ich istnienia na drodze eksperymentalnej. Okazuje się, że „stara" aparatura do rejestracji fal grawitacyjnych, jaką posługiwał się John Weber i jego naśladowcy, miała czułość pozwalającą na zarejestrowanie odkształceń bloku aluminiowego, który pełnił w niej funkcję anteny, nie mniejszych niż „zaledwie" 10^{-15} cm. Dodajmy, że typowy wymiar jądra atomowego wynosi 10^{-13} cm. Obecnie sądzi się, że właśnie ta „niska" czułość nie pozwoliła na bezsporne zarejestrowanie fal grawitacyjnych. W związku z tym uczeni z uniwersytetów w Luizjanie, Stanford i Rzymie budują aparaturę zdolną do rejestracji zmian długości bloku — anteny rzędu 10^{-20} na jednym metrze, co powinno wystarczyć do definitywnego wyjaśnienia zagadki fal grawitacyjnych.

Tematem związanym z falami grawitacyjnymi jest temat „czarnych dziur", które mogą być jednym ze źródeł tych fal. Interesujący przedruk z często w tej rubryce cytowanego «Physics Today» i traktujący o tych pełnych zagadek obiektach kosmicznych znaleźć można w tegorocznym 3 nrze «Problemów».

W roku bieżącym mija 250-lecie założenia Akademii Nauk ZSRR. Wydarzeniu temu poświęcony jest tegoroczny 1 nr miesięcznika «Priroda». Oprócz historii założenia samej Akademii w 1724 r. przez Piotra Wielkiego znaleźć w nim można także bardzo interesujące artykuły o życiu i pracach najwybitniejszych członków tej instytucji. Z punktu widzenia matematyki i fizyki najbardziej interesujące są sylwetki Michała Łomonosowa, Leonarda Eulera i Igora Kurczatowa. Szczególnie wart polecenia jest artykuł o tym ostatnim uczonym i organizatorze nauki, który w latach II wojny światowej poświęcił swój talent budowie radzieckiej broni atomowej, a w latach powojennych był jednym z pionierów prac nad kontrolowaną syntezą termojądrową.

K. A.

Rozwiązanie zadania M. 28

Podstawiając w miejsce x kolejne liczby naturalne, otrzymujemy 9, 15, 25, 39, 57, 79, 105, 135, 169, 207, 249, 295, ..., widzimy więc, że jeżeli x nie dzieli się przez 3, to $2x^2+7$ dzieli się przez 3, co można łatwo wykazać. Jeżeli bowiem x nie dzieli się przez 3, to dla pewnej liczby całkowitej k zachodzi równość $x = 3k \pm 1$, skąd $x^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$ i x^2 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, $2x^2+7$ zaś resztę 0. Liczbę pierwszą jako wartość wyrażenia $2x^2+7$ możemy więc otrzymać tylko wtedy, gdy x jest podzielna przez 3. Ponieważ $2 \cdot 3^2 + 7 = 25$ jest liczbą złożoną, więc jeżeli $2x^2+7$ jest liczbą pierwszą, to x jest podzielne przez 3 i większe od 3, a więc złożone. Matematycy wypowiedzieli hipotezę, z której wynika, że dla nieskończenie wielu wartości naturalnych x liczba $2x^2+7$ jest pierwsza, jednak hipoteza ta jest nieudowodniona.