(założenie takie przyjmowaliśmy milcząco zarówno w przykładzie Działkowicza, jak i gry „Morra"). Z założenia tego łatwo wnioskujemy, że jeśli gracz A zastosuje strategię $(x, 1-x)$, a gracz B — strategię $(y, 1-y)$, to wynikająca z zastosowania tych strategii wypłata dla A wyniesie:

$$w(x, y) = axy + bx(1-y) + c(1-x)y + d(1-x)(1-y).$$

Sformułowana powyżej definicja rozwiązania gry nie traci sensu przy takim rozszerzeniu pojęcia strategii i pojęcia wypłaty, można więc dalej pytać o istnienie rozwiązania; okazuje się przy tym, że prawdziwe jest następujące twierdzenie:
Podstawowe twierdzenie teorii gier 2×2. *Każda gra posiada rozwiązanie* (w strategiach mieszanych).

Szkic dowodu: Dla gier posiadających strategię dominującą twierdzenie jest już udowodnione. Jeśli gra nie posiada strategii dominującej, to strategią optymalną gracza A jest $(p, 1-p)$, gdzie

$$p = \frac{d-c}{a+d-b-c},$$

a optymalną strategią gracza B jest $(q, 1-q)$, gdzie

$$q = \frac{d-b}{a+d-b-c}.$$

Pozostaje sprawdzić, że wskazana para strategii rzeczywiście jest rozwiązaniem. Sprawdzenie to jest treścią zadań 3 i 4. (Można też dowodzić inaczej — metodą analogiczną do zastosowanej przy rozwiązywaniu problemu Działkowicza).
Twierdzenie to załatwia w zasadzie całą teorię gier 2×2, ponieważ umożliwia nam rozwiązanie każdej takiej gry. Można jednak spróbować rozszerzyć tę teorię odrzucając na przykład założenie, że obaj gracze grają bezbłędnie. Można by wtedy spróbować rozstrzygnąć zagadnienie, które w podręcznikach teorii gier nie jest na ogół omawiane: jak wygrywać na błędach przeciwnika. Problemem tym — niezwykle interesującym z praktycznego punktu widzenia — postaramy się zająć w przyszłości.

Zadania

1. W pierwszym odcinku „sztuki wygrywania" (Delta» nr 2) wprowadziliśmy pojęcie strategii minimaksowych. Wiemy również, że jeśli strategie minimaksowe są w równowadze, to stanowią one rozwiązanie gry. Udowodnić, że jeśli w grze 2×2 strategie minimaksowe są w równowadze, to co najmniej jeden z graczy posiada strategię dominującą, a jest nią strategia minimaksowa.
2. Udowodnić, że jeśli gra 2×2 nie posiada rozwiązania w strategiach czystych, to $a+d \neq b+c$.
3. Sprawdzić, że strategia $(p, 1-p)$ gracza A (p — zdefiniowane w tekście) daje graczowi A wypłatę $v = \dfrac{ad-bc}{c+d-b-c}$ niezależną od tego, jaką strategię $(y, 1-y)$ stosuje gracz B. Wykazać również, że $w(x, q) = v$ niezależnie od tego, jaką strategię $(x, 1-x)$ stosuje gracz A.
4. Z wyników zadania 3 wywnioskować, że para strategii mieszanych $(p, 1-p)$ i $(q, 1-q)$ jest rozwiązaniem gry.

Rozwiązania na str. 13.

Problem

Zbudować algorytm (por. *Algorytmy* A. Skowrona) rozwiązywania gier 2×2. Prosimy o nadsyłanie pomysłów.

Pomysł

Jak wyznaczyć czas trwania błysku lasera impulsowego? Odpowiedź jest bardzo prosta. Istnieją szybkie układy elektroniczne i odpowiednie oscylografy pozwalające na rejestracje zdarzeń trwających kilka nanosekund (1 ns $= 10^{-9}$ s). Co jednak zrobić jeżeli w pracowni nie ma akurat potrzebnego przyrządu? Kupić — nie zawsze można zrealizować szybko zamówienie, pożyczyć — też jest to kłopotliwe. W tej sytuacji dobry pomysł pozwala czasem na pokonanie nieprzezwyciężonych na pozór trudności.
Oto historia z Zakładu Optyki Instytutu Fizyki Doświadczalnej UW. W połowie 1973 r. uruchomiono barwnikowy laser impulsowy (patrz «Delta» — 9). Dr Jerzy Krasiński i mgr Stanisław Majewski chcieli określić od razu długość trwania impulsu. Spodziewali się czasów trwania rzędu kilku lub kilkunastu ns. Potrzebnego urządzenia nie było pod ręką, mieli natomiast aparat fotograficzny, parę zwierciadeł, centymetr krawiecki oraz metalowy pręt. To wystarczyło. Pomyślcie przez chwilę, zanim przeczytacie na czym pomysł polegał (c.d. na str. 11).

Rozwiązanie zadania M. 29

Niech funkcje f i g spełniają warunek $f(x) + f(a-x) = xg(x)$ dla każdego x.
W szczególności dla $x = 0$ i dla $x = a$ otrzymujemy $f(0)+f(a) = 0$, $f(a)+f(0) = ag(a)$.
Z tych dwóch równości wynika $ag(a) = 0$ i wobec $a \neq 0$ otrzymujemy $g(a) = 0$.