Możemy zastosować udowodnione twierdzenie, biorąc $f(x) = -x$ i $g(y) = y$. Jako funkcje pierwotne weźmy $F(x) = -\frac{1}{2}x^2$ i $G(y) = \frac{1}{2}y^2$. Zatem $F(x_0) = F(0) = 0$, $G(y_0) = G(1) = \frac{1}{2}$.

Ze wzoru (5) mamy więc: $\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2 = 0$, czyli $x^2+y^2-1 = 0$.

Jedynym rozwiązaniem tego zadania spełniającym warunek $y(0) = 1$ jest funkcja

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{gdzie} \quad x \in (-1, 1).$$

P r z y k ł a d 2: Ciało stałe o masie m zanurzone w cieczy rozpuszcza się z szybkością proporcjonalną do ilości nierozpuszczonej substancji. Niech $y = y(t)$ oznacza masę substancji rozpuszczonej w czasie t. Jaka to funkcja, jeżeli wiadomo, że $y(0) = 0$?

Otóż masa nierozpuszczonej substancji po upływie czasu t jest równa $m - y(t)$, szybkość rozpuszczania wynosi $\frac{dy}{dt}$, a więc funkcja $y = y(t)$ spełnia równanie

$$\frac{dy}{dt} = k(m-y), \quad (k \text{ — współczynnik proporcjonalności}).$$

Czytelnik bez trudu sprawdzi (stosując np. udowodnione wyżej twierdzenie), że jedynym rozwiązaniem naszego zadania jest funkcja $y = m(1-e^{-kt})$.

O dalsze przykłady zagadnień prowadzących do równań różniczkowych nie jest trudno. Zetknąć się można z nimi w wielu dziedzinach nauki i techniki.

Ciekawe — i nie tylko

O trudnościach związanych z uprawianiem fizyki we współczesnym świecie najlepiej mogą świadczyć bardzo skomplikowane urządzenia badawcze, jakimi muszą się posługiwać dzisiejsi uczeni. «Physics Today», nr 1, 1974, przynosi opis dwóch wielkich komór pęcherzykowych — urządzeń służących do rejestracji torów cząstek elementarnych wytworzonych przy pomocy wielkich akceleratorów (komory są więc tylko jednym z ogniw całego łańcucha narzędzi badawczych współczesnego fizyka cząstek elementarnych, łańcucha, który zaczyna się od akceleratora i kończy się dopiero na komputerze). Największa komora europejska w CERN-ie koło Genewy ma 3,7 m średnicy, a tory cząstek są w niej odchylane przy pomocy pola magnetycznego o natężeniu 2T(20 tys. Gausów). Największa komora amerykańska współpracuje z potężnym akceleratorem rozpędzającym protony do energii 300 GeV, znajdującym się w NAL (National Accelerator Laboratory). Komora ta ma kształt gruszki o największym wymiarze 4,5 m. Mieści się w niej, zależnie od potrzeb, 32 000 litrów ciekłego wodoru, mieszanki neonu z wodorem lub deuteru. Cząstki elementarne odchylane są w tej komorze przy pomocy elektromagnesu dającego natężenie pola rzędu 3T(30 tys. Gausów). Aby wytworzyć to pole, należy przez uzwojenie elektromagnesu przepuścić prąd o natężeniu 5 000 A. Cewka elektromagnesu ma 4,2 m średnicy wewnętrznej i 5,1 m średnicy zewnętrznej. Energia zmagazynowana w nim wynosi 400 MJ.

Ten sam numer «Physics Today» przynosi również bardzo interesujący artykuł o falach grawitacyjnych i nowych próbach potwierdzenia ich istnienia na drodze eksperymentalnej. Okazuje się, że „stara" aparatura do rejestracji fal grawitacyjnych, jaką posługiwał się John Weber i jego naśladowcy, miała czułość pozwalającą na zarejestrowanie odkształceń bloku aluminiowego, który pełnił w niej funkcję anteny, nie mniejszych niż „zaledwie" 10^{-15} cm. Dodajmy, że typowy wymiar jądra atomowego wynosi 10^{-13} cm. Obecnie sądzi się, że właśnie ta „niska" czułość nie pozwoliła na bezsporne zarejestrowanie fal grawitacyjnych. W związku z tym uczeni z uniwersytetów w Luizjanie, Stanford i Rzymie budują aparaturę zdolną do rejestracji zmian długości bloku — anteny rzędu 10^{-20} na jednym metrze, co powinno wystarczyć do definitywnego wyjaśnienia zagadki fal grawitacyjnych.

Tematem związanym z falami grawitacyjnymi jest temat „czarnych dziur", które mogą być jednym ze źródeł tych fal. Interesujący przedruk z często w tej rubryce cytowanego «Physics Today» i traktujący o tych pełnych zagadek obiektach kosmicznych znaleźć można w tegorocznym 3 nrze «Problemów».

W roku bieżącym mija 250-lecie założenia Akademii Nauk ZSRR. Wydarzeniu temu poświęcony jest tegoroczny 1 nr miesięcznika «Priroda». Oprócz historii założenia samej Akademii w 1724 r. przez Piotra Wielkiego znaleźć w nim można także bardzo interesujące artykuły o życiu i pracach najwybitniejszych członków tej instytucji. Z punktu widzenia matematyki i fizyki najbardziej interesujące są sylwetki Michała Łomonosowa, Leonarda Eulera i Igora Kurczatowa. Szczególnie wart polecenia jest artykuł o tym ostatnim uczonym i organizatorze nauki, który w latach II wojny światowej poświęcił swój talent budowie radzieckiej broni atomowej, a w latach powojennych był jednym z pionierów prac nad kontrolowaną syntezą termojądrową.

K. A.

Rozwiązanie zadania M. 28

Podstawiając w miejsce x kolejne liczby naturalne, otrzymujemy 9, 15, 25, 39, 57, 79, 105, 135, 169, 207, 249, 295, ..., widzimy więc, że jeżeli x nie dzieli się przez 3, to $2x^2+7$ dzieli się przez 3, co można łatwo wykazać. Jeżeli bowiem x nie dzieli się przez 3, to dla pewnej liczby całkowitej k zachodzi równość $x = 3k \pm 1$, skąd $x^2 = 9k^2 \pm 6k + 1$ i x^2 daje przy dzieleniu przez 3 resztę 1, $2x^2+7$ zaś resztę 0. Liczbę pierwszą jako wartość wyrażenia $2x^2+7$ możemy więc otrzymać tylko wtedy, gdy x jest podzielna przez 3. Ponieważ $2 \cdot 3^2 + 7 = 25$ jest liczbą złożoną, więc jeżeli $2x^2+7$ jest liczbą pierwszą, to x jest podzielne przez 3 i większe od 3, a więc złożone. Matematycy wypowiedzieli hipotezę, z której wynika, że dla nieskończenie wielu wartości naturalnych x liczba $2x^2+7$ jest pierwsza, jednak hipoteza ta jest nieudowodniona.