— Dziękujemy panu Jordanowi za istotny wkład do cennika. Czy są jeszcze jakieś propozycje? Pan Lebesgue, Młodszy Kasjer!
— Moja propozycja zmierza do pewnej modyfikacji *Cennika Euklidesa–Jordana.* Po pierwsze, trzeba zastąpić zasadę 3 przez

Zasadę 3*. Jeżeli ceny wycinków folii $A_1, A_2, \ldots$, są odpowiednio równe $a_1, a_2, \ldots$, to łączna cena tych wycinków wynosi $a_1 + a_2 + \ldots$

Po drugie, nazwijmy *Cennikiem* (*) cennik złożony z zasad 1, 2 i 3* oraz dla każdego kawałka folii A oznaczmy przez $\tilde{a}_A$ dolny kres cen, według *Cennika* (*), wszystkich zbiorów zawierających A. Wtedy zasadę pana Jordana pragnąłbym zastąpić przez

Zasadę 4*. Jeżeli A jest kawałkiem folii zawartym w kwadracie Q, takim że $\tilde{a}_A + \tilde{a}_{Q-A}$ = cena Q, to cena A wynosi $\tilde{a}_A$.

Pragnę podkreślić, że cennik obejmujący zasady 1, 2, 3* i 4* jest istotnie lepszy od *Cennika Euklidesa–Jordana.* To znaczy, że jeżeli cenę pewnego wycinka folii można ustalić posługując się *Cennikiem Euklidesa–Jordana,* to można tę cenę ustalić także za pomocą cennika obejmującego zasady 1, 2, 3* i 4*; w obu przypadkach otrzymamy tę samą cenę. Z drugiej jednak strony istnieją kawałki, których cenę można wyznaczyć posługując się cennikiem obejmującym zasady 1, 2, 3* i 4*, a nie można w obrębie *Cennika Euklidesa–Jordana.* Jako przykład takiego kawałka niech służy podzbiór kwadratu $<0, 1> \times <0, 1>$, złożony z punktów o obu współrzędnych niewymiernych. Cena jego, w ramach cennika obejmującego zasady 1, 2, 3* i 4* wynosi 1, natomiast w obrębie *Cennika Euklidesa–Jordana* nie można jej wyznaczyć (fachowcy mówią, że zbiór jest niemierzalny w sensie Jordana.)
— Dziękuję panu Lebusgue'owi. Proponuję przyjąć cennik złożony z zasad 1, 2, 3* i 4* jako obowiązujący w naszym Banku i nazwać go „miarą Lebesgue'a". Kto jest za? Wszyscy. I słusznie, jest to bowiem najlepsza miara. Dziękuję panom. A teraz do mierzenia złotej folii.

Związki fizyki z matematyką

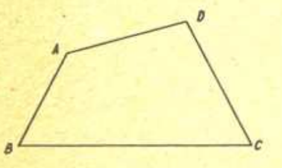
Prof. dr Józef WERLE, członek korespondent PAN

Fizyka jest nauką ścisłą, bardzo mocno związaną z matematyką. Czy jednak zastanawialiście się, na czym te związki polegają? Dzięki czemu są one możliwe i płodne? Jaki jest ich charakter i znaczenie dla obu nauk? Czy możliwa jest prawdziwa, nowoczesna fizyka bez matematyki? Czy możliwa jest matematyka bez fizyki? Jak przedstawiały się związki między tymi naukami dawniej i jak przedstawiają się dziś? Czy każdą naukę, w której stosuje się wzory matematyczne, można tym samym zaliczyć do nauk ścisłych?
Oto garść pytań, na które niełatwo odpowiedzieć tylko na podstawie szkolnych lekcji fizyki i matematyki. W szkole średniej o takich problemach nie mówi się raczej wcale, a na studiach wyższych — tym bardziej nie. Cała sprawa należy więc z reguły do bardzo subiektywnej i ukrytej sfery podświadomości, a ta — wiadomo — lubi płatać figle naszej świadomości. Nie są to bynajmniej figle niewinne, lecz takie, które wyrządzają duże szkody społeczne. Ale to już inna historia, której lepiej nie opowiadać nieświadomym ofiarom tej sytuacji. Postarajmy się więc przede wszystkim pogłębić naszą świadomość.
Na laboratoryjnych, eksperymentalnych lekcjach fizyki robimy rzeczy na pozór nie mające nic wspólnego z matematyką: obserwujemy różne zjawiska przyrody, robimy doświadczenia, uczymy się posługiwania podstawowymi aparatami fizycznymi. Warto jednak zauważyć, że nie wystarczają nam jakościowe obserwacje, np. że włączenie prądu powoduje nagrzewanie się przewodnika oraz odchylenie igły stojącej obok busoli. Pytamy od razu o ilość wydzielanego w przewodniku ciepła, o wielkość odchylenia busoli, o ich zależność od napięcia i natężenia prądu, położenia busoli, własności przewodnika itp. Aby odpowiedzieć na takie pytania, musimy wykonać szereg odpowiednich pomiarów przy pomocy termometru, woltomierza, amperomierza itd. Wszystkie tego typu przyrządy, służące pierwotnie do czysto jakościowego wykrywania pewnych określonych efektów fizycznych, po odpowiednim wycechowaniu zamieniają się w przyrządy do mierzenia tychże efektów. Innymi słowy, każde zjawisko fizyczne staramy się zawsze opisać jak najściślej za pomocą odpowiednich cech ilościowych, czyli tak zwanych wielkości fizycznych. Jest rzeczą zdumiewającą, że to się udaje, i do tego — tak dobrze. Każdy pomiar ustala pewną ilościową relację między odpowiednimi wielkościami fizycznymi; relacja

Rozwiązanie zadania M26

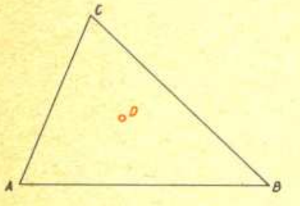
Rozważmy tak zwane domknięcie wypukłe zbioru złożonego z danych czterech punktów. Jest to najmniejszy zbiór wypukły, zawierający dany zbiór; można go sobie wyobrazić jako obszar (domknięty) ograniczony gumką, którą początkowo rozciągnięto tak, by obejmowała wszystkie punkty, a później ją zwolniono umieściwszy w danych punktach szpilki.

W sytuacji przedstawionej w zadaniu możliwe są dwa przypadki: w pierwszym — domknięciem wypukłym danego zbioru jest czworokąt wypukły i jeden z jego kątów jest $\geqslant 90°$ (na rysunku jest to kąt przy wierzchołku A); wówczas szukanym trójkątem jest trójkąt DAB. Oczywiście wszystkie kąty czworokąta nie mogą być ostre, gdyż wówczas suma jego kątów wewnętrznych byłaby $< 360°$, a wiadomo, że suma ta jest równa $360°$.



W drugim przypadku domknięciem wypukłym danego zbioru jest trójkąt i jeden z danych punktów (na rysunku — D) leży wewnątrz tego trójkąta.

Wówczas jeden z kątów ADB, BDC, CDA jest $\geqslant 120°$.



ta ma tę „cudowną" własność, że daje się zawsze wyrazić matematycznie. W zależności od rodzaju badanego zjawiska mamy do czynienia z różnymi typami relacji dających się wyrazić przez jedną liczbę albo określony zbiór liczb (np. wektor, tensor), albo odpowiednią funkcję, albo funkcjonał itd. Przyrządy pomiarowe umożliwiają więc wszechstronne stosowanie matematyki do opisu i zapisu wyników obserwacji zjawisk fizycznych, do formułowania praw fizyki, do rozwiązywania wielu problemów i wyciągania fizycznych i praktycznych wniosków z teorii fizycznych.

Na lekcjach matematyki w szkole średniej poznajemy oczywiście tylko najbardziej podstawowe pojęcia i metody matematyczne, uczymy się ścisłego matematycznego myślenia oraz nabywamy pewnych nieodzownych dla bardzo wielu zawodów umiejętności rachunkowych. Ilustracją i zastosowaniem poznanych pojęć i teorii matematycznych oraz sprawdzianem nabytych umiejętności są zadania zaczerpnięte z różnych dziedzin nauki i praktyki, ale przede wszystkim z fizyki.

Pracujący naukowo fizyk, a szczególnie fizyk teoretyk, musi oczywiście znać matematykę dużo lepiej. Nie wystarcza mu elementarna arytmetyka i geometria ani nawet rachunek różniczkowy i całkowy. Musi często korzystać z analizy funkcjonalnej, teorii grup, topologii itd.

Fizyka eksperymentalna dostarcza nam więc wiedzy o realnych faktach (zjawiskach fizycznych), natomiast matematyka dostarcza ścisłych metod do formalnego opisu tych faktów przy pomocy odpowiednich symboli i wzorów. Niewątpliwie jest wiele racji w często głoszonym twierdzeniu, że najważniejsze w fizyce są fakty w postaci wyników obserwacji i pomiarów dotyczących interesujących nas zjawisk (obiektów, zdarzeń, procesów itp.). Nawet jednak najskrupulatniejszy opis zjawisk, nawet najstaranniej ułożony katalog faktów nie jest w stanie wyjaśnić przyczyn ani nie stwarza możliwości głębszych przewidywań. Katalogi wprawdzie mogą pomóc w znalezieniu pewnych korelacji i prawidłowości, ale nie wyjaśnią ich sensu i znaczenia oraz przyczyn i skutków. Katalog więc może dać pewne cząstkowe odpowiedzi na pytania typu „co i jak?", ale nie może dać odpowiedzi na pytanie typu „dlaczego?" i „co z tego wynika?". Na takie bardziej wnikliwe pytania mogą dać odpowiedź jedynie przyczynowe, ilościowe teorie fizyczne podające strukturalne lub dynamiczne prawa rządzące obserwowanymi zjawiskami. Znajomość tych praw pozwala nie tylko na głębsze uporządkowanie faktów, nie tylko na zrozumienie przyczyn, lecz także i skutków, to znaczy na dokładne ilościowe przewidywania. A umiejętność przewidywania jest podstawą wszelkiego skutecznego działania praktycznego.

Rola matematyki w konstrukcji teorii fizycznych jest więc ogromna. Matematyka dostarcza po prostu metod nieodzownych do konstrukcji teorii fizycznych, bez których teorie te byłyby przynajmniej znacznie uboższe, jeśli nie wręcz niemożliwe. Wprawdzie w niektórych teoriach fizycznych podstawowe koncepcje mają charakter bardzo poglądowego i prostego — najczęściej mechanicznego — modelu, który można jako tako zrozumieć bez matematyki, jednakże użycie metod matematycznych staje się konieczne nawet wówczas, gdy od czysto jakościowego wyjaśnienia prostych zjawisk i praw chcemy przejść do głębszych i bardziej konkretnych, ilościowych rezultatów.

Weźmy jako przykład kinetyczną teorię gazów. Uproszczony model gazu opiera się na założeniu, że jego cząsteczki są doskonale sprężystymi kulkami poruszającymi się „całkowicie bezładnym" ruchem termicznym z tym większą średnią prędkością, im wyższa jest temperatura gazu. Na gruncie takiego modelu możemy wyjaśnić jakościowo ciśnienie jako wynik elastycznych zderzeń cząsteczek między sobą oraz ze ściankami naczynia. Możemy też wyjaśnić, na czym z grubsza polega proces wyrównywania ciśnień i temperatur oraz dążenia do stanu równowagi. Jeśli jednak chcemy znaleźć równanie stanu gazu, czyli zależność ciśnienia od gęstości i temperatury, jeśli chcemy znaleźć zależność temperatury od średniej energii kinetycznej lub wartość współczynnika przewodnictwa cieplnego itp., musimy wyrazić nasz mechaniczny model gazu w postaci matematycznej. W matematycznym sformułowaniu występuje nie tylko wartość masy i promienia cząsteczki, lecz także prawo rozkładu prędkości; teoria taka podaje też sposób liczenia prawdopodobieństw oraz wartości średnich, to jest sposób obliczania wielkości makroskopowych na podstawie znajomości odpowiednich charakterystyk mikroskopowych. Okazuje się, że za pomocą takiej bardziej matematycznie rozbudowanej teorii możemy nie tylko obliczyć wspomniane wyżej własności gazu, lecz także podać głębsze wyjaśnienie wielu obserwowanych zjawisk i praw, na przykład procesów przewodnictwa cieplnego i dążenia do stanu równowagi termodynamicznej, pierwszej i drugiej zasady termodynamiki, prawa wzrostu entropii itp.

Konstrukcja poprawnej, jak najogólniejszej, ilościowej, matematycznej teorii badanych zjawisk jest z jednej strony celem i uwieńczeniem określonych etapów badań naukowych, a z drugiej strony jest punktem wyjścia do wielu dedukcji i wniosków naukowych oraz zastosowań praktycznych. I tak na przykład szerokie zastosowania zjawisk elektromagnetycznych stały się możliwe dopiero po powstaniu teorii Maxwella, która przewidziała na przykład istnienie i konkretne własności tak ważnych dla praktyki fal elektromagnetycznych.

Różne zjawiska fizyczne wymagają stosowania różnych metod matematycznych. Potrzeby szybko rozwijającej się nowożytnej fizyki wyprzedzały często rozwój matematyki. W takich sytuacjach niejednokrotnie sami fizycy lub współpracujący z nimi matematycy, stwarzali niejako na zamówienie fizyki nowe metody i nowe działy matematyki. W ten właśnie sposób, „na zamówienie" lub z inspiracji fizyki, powstała geometria analityczna, rachunek różniczkowy i całkowy, teoria równań różniczkowych i całkowych, rachunek wariacyjny, analiza wektorowa i tensorowa itd. aż do powstałej w XX wieku teorii dystrybucji. Taka sytuacja wytworzyła przekonanie, że matematyka jest swoistą nauką przyrodniczą charakteryzującą się największym stopniem ogólności i abstrakcji. Jako taka została nawet nazwana „królową nauk przyrodniczych". Jednakże począwszy od połowy XIX wieku sytuacja zaczęła się stopniowo zmieniać. Coraz częściej powstają w matematyce nowe konstrukcje logiczne (systemy dedukcyjne, teorie) oparte na zupełnie nie związanych z jakimikolwiek doświadczalnymi faktami pojęciach i aksjomatach.

Z drugiej strony poza fizyką, astronomią i chemią z uniwersalnych metod matematyki zaczynają korzystać w coraz większym stopniu nauki biologiczne, psychologiczne, społeczne, a nawet humanistyczne. Wystarczy wskazać na szybko rosnącą rolę matematyki w ekonomii, socjologii czy lingwistyce.

W XX wieku matematyka uniezależniła się w sposób już bardzo wyraźny od fizyki. Słyszy się często, że dzisiejsza matematyka nie czeka na zapotrzebowanie fizyki i innych nauk, lecz pracuje niejako na wyrost tworząc drogą czysto logicznych rozważań systemy dedukcyjne, które mogą znaleźć później zastosowanie do opisu realnych faktów. W rzeczywistości jednak chodzi o znacznie głębszą zmianę charakteru współczesnej matematyki.

Według obecnie przyjętej klasyfikacji dzielimy nauki na faktualne, tj. zajmujące się odkrywaniem i badaniem realnych faktów, i formalne, które zajmują się badaniem logicznie poprawnych relacji między abstrakcyjnie określonymi obiektami, które mogą nie mieć żadnych realnych odpowiedników. Współczesna nam matematyka należy z pewnością do nauk formalnych. Jej zadaniem nie jest odkrywanie realnych faktów przyrodniczych, lecz tworzenie i rozwijanie coraz nowych i coraz potężniejszych języków symbolicznych służących do opisu i badania relacji, dla których języki naturalne (narodowe) byłyby zbyt trudne, skomplikowane czy wręcz nieadekwatne. Matematyka współczesna bada więc coraz nowe logicznie dopuszczalne struktury (relacje) i tworzy odpowiednie do nich uniwersalne, sztuczne języki symboli i reguł postępowania. Dopiero nauki faktualne rozstrzygają, które ze skonstruowanych przez matematyków struktur logicznych znajdują odbicie w rzeczywistości i które z utworzonych matematycznych języków znajdują zastosowanie i do czego.

Praca badawcza matematyków wyprzedza więc w podanym wyżej sensie potrzeby fizyki i innych nauk faktualnych i staje się coraz bardziej niezależna od nich. Oczywiście takie niezależne badania w zakresie matematyki, wyprzedzające zapotrzebowanie, mogą być niezwykle pożyteczne dla wielu nauk faktualnych, które często znajdują w matematyce współczesnej potrzebne im metody w gotowej do użycia postaci. Nie podzielam jednak wiary, że wszystkie logicznie dopuszczalne schematy matematyczne mają odbicie w realnych faktach (które jeśli nawet nie są dziś znane, to jakoby zostaną odkryte w przyszłości). Jestem przekonany, że nie wszystko, co jest w umyśle, ma swe odbicie w rzeczywistości i że umysł ludzki jest w tym sensie bogatszy od Natury.

Jeśli nawet nie mam racji absolutnej, to pozostaje jeszcze racja praktyczna: odkrycie faktów wymagających stosowania jakiejś konkretnej teorii matematycznej może nastąpić po naszej śmierci... Tak więc, po zdobyciu pewnego ogólnego wykształcenia matematycznego w szkole podstawowej i średniej, każdy użytkownik matematyki powinien przede wszystkim poznać te języki matematyczne, które są używane i nieodzowne w jego zawodzie. Uczenie się matematyki bez takiego wyboru, na wyrost i na chybił-trafił wydaje się bardzo ryzykowne, ale z drugiej strony każdy twórczy umysł powinien być otwarty i przygotowany do przyswojenia sobie w razie potrzeby nowych metod matematycznych.

W zakresie fizyki funkcje spełniane dawniej przez matematyków przejęli w XX wieku fizycy-teoretycy. Ich główne zadanie polega na tworzeniu jak najogólniejszych i ścisłych, przyczynowych, matematycznych teorii obserwowanych zjawisk fizycznych. Po skonstruowaniu teorii bada się — znowu drogą matematyczną — jej różne konsekwencje fizyczne, filozoficzne i praktyczne. Podstawowym kryterium przydatności teorii fizycznej jest jej ilościowa zgodność z obserwowanymi faktami.

Oczywiście powstanie nowej, dobrej teorii fizycznej odbywa się zupełnie inaczej niż powstanie nowej teorii matematycznej. Konstrukcję teorii fizycznej poprzedza z reguły szereg próbnych hipotez, stopniowo doskonalonych przez porównienie z realnymi faktami. Konfrontacja konkretnej próbnej hipotezy z faktami doświadczalnymi prowadzi albo do jej odrzucenia, jako wyraźnie fałszywej, albo do konieczności częściowej modyfikacji, albo do jej potwierdzenia i stopniowego utwierdzenia jako poprawnej teorii. Tworzenie nowych teorii fizycznych wymaga więc silnego sprzężenia zwrotnego między realnymi faktami i ich pojęciowym i matematycznym opisem, czyli między teorią i eksperymentem. Istnienie tego sprzężenia warunkuje postęp fizyki jako nauki ścisłej, ale przyrodniczej. Ten związek metod eksperymentalnych z matematycznymi czyni z fizyki naukę trudną, ale jednocześnie porywającą i piękną dzięki pięknu Natury, którą fizyka bada, i dzięki pięknu matematyki, którą fizyka się posługuje.