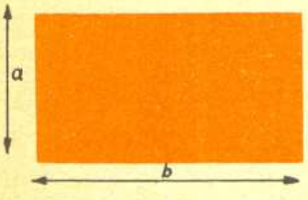
Kłopoty sprzedawców złotej folii

Dr Piotr MANKIEWICZ

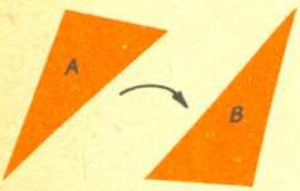
WYCENA

ZASADA 1



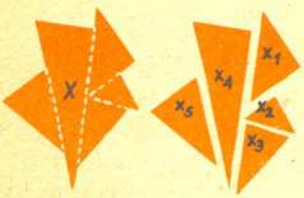
$C = ab$

ZASADA 2



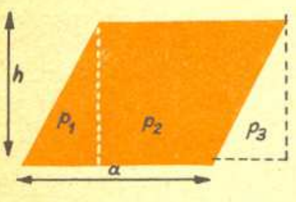
$C_A = C_B$

ZASADA 3

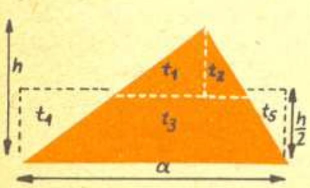


$C_X = C_{X1} + \ldots + C_{X5}$

Na przykład



$C_P = C_{P1} + C_{P2} = C_{P3} + C_{P2} = a \cdot h$



$C_t = C_{t1} + C_{t2} + C_{t3} = C_{t4} + C_{t5} + C_{t3} = \frac{1}{2} a \cdot h$

— Otwieram naradę pracowników naszego Banku, zwołaną w sprawie ustalenia cennika złotej folii, którą nasz Bank, w ramach wzbogacania asortymentu, wprowadza do sprzedaży. Państwo pozwolą, że przypomnę, na czym polega problem. Gdybyśmy mieli zamiar sprzedawać tylko wycinki folii o określonym regularnym kształcie, kwadratowe lub prostokątne, każdy kasjer bez najmniejszego kłopotu mógłby określić cenę takiego wycinka. My jednak, kierując się hasłem ,,Nasz klient — nasz pan", chcemy ustalić cennik jak najszerszego asortymentu kształtów, tak by każdy mógł nabyć wycinek złotej folii o kształcie najbardziej mu odpowiadającym. Uprzejmie proszę o zgłaszanie propozycji takiego cennika. Widzę, że pan Starszy Kasjer Euklides ma jakąś propozycję.

— Przygotowałem następującą propozycję cennika składającego się z trzech zasad:

Zasada 1. Cena prostokąta o bokach a i b wynosi ab.
Zasada 2. Ceny takich samych wycinków folii (przystających), jeżeli dają się określić, są sobie równe.
Zasada 3. Jeżeli ceny wycinków folii $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są odpowiednio równe $a_1, a_2, \ldots, a_n$, to łączna cena tych wycinków wynosi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

A oto plakat wyjaśniający naszym klientom mechanizm stosowania cennika, a jednocześnie podający ceny najczęściej żądanych figur.

— Brawo, panie Starszy Kasjerze! Czy ktoś chciałby skomentować propozycję pana Euklidesa?

— Udzielam głosu inżynierowi Archimedesowi z Wydziału Postępu Technicznego.

— Moim zdaniem, *Cennik Euklidesa* ma pewne istotne wady. Mianowicie, nie można za jego pomocą wyznaczyć ceny wielu często spotykanych figur, na przykład wycinka w kształcie koła. Moja propozycja jest prosta. Jeżeli klient zażąda jakiegoś wycinka, to kasjer porównuje ciężar tego wycinka z ciężarem kwadratu jednostkowego i w ten sposób określa jego cenę. Banalne!

— W imieniu dyrekcji muszę stwierdzić, że propozycja inżyniera Archimedesa jest nie do przyjęcia. Po pierwsze, ze względu na kłopoty ze znalezieniem idealnie dokładnej wagi, na której można by dokładnie ważyć rzeczy tak cenne i lekkie, jak złota folia. Po drugie, metoda ta może narazić nas na poważne straty. Przypuśćmy, że przychodzi klient i pyta o cenę kawałka folii w kształcie swojego cienia. Przy pańskiej metodzie powinien kasjer wyciąć taki kawałek folii, by następnie go zważyć. Istnieje poważne ryzyko, że wtedy klient stwierdzi, że ten kawałek jest dla niego zbyt drogi. I co wtedy zrobi nasz Bank z tak nietypowym kawałkiem folii? Trudno oczekiwać, że zjawi się inny klient z żądaniem folii w kształcie cienia pana X!

— Czy są inne jakieś propozycje? Proszę, pan Kasjer Jordan.

— Moja propozycja zmierza do wzbogacenia *Cennika Euklidesa* o zasadę 4, niestety nieco skomplikowaną.

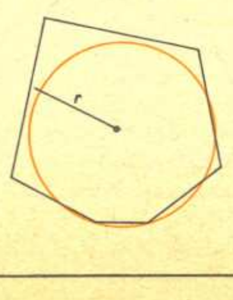
Zasada 4. Dla każdego kawałka folii A niech $\overline{a}_A$ oznacza dolny kres cen, według *Cennika Euklidesa*, wszystkich figur zawierających A, zaś $\underline{a}_A$ oznacza górny kres cen, według *Cennika Euklidesa*, wszystkich figur zawartych w A. Jeżeli dla pewnego kawałka folii A

$$\underline{a}_A = \overline{a}_A,$$

to ta wspólna wartość jest ceną A.

A oto rysunek wyjaśniający mechanizm stosowania tej zasady na przykładzie wycinka w kształcie koła.

ZASADA 4



Cena wielokąta opisanego na kole =

$= \frac{\text{obwód wielokąta} \cdot \text{promień koła}}{2}$

skąd

$\overline{a}_0 = \frac{\text{obwód koła} \cdot \text{promień}}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2.$

Można pokazać, że $\underline{a}_0 = \overline{a}_0$. Więc cena koła wynosi

$C_0 = \pi r^2$

— Dziękujemy panu Jordanowi za istotny wkład do cennika. Czy są jeszcze jakieś propozycje? Pan Lebesgue, Młodszy Kasjer!

— Moja propozycja zmierza do pewnej modyfikacji *Cennika Euklidesa–Jordana.* Po pierwsze, trzeba zastąpić zasadę 3 przez

Zasadę 3*. Jeżeli ceny wycinków folii $A_1, A_2, \ldots$, są odpowiednio równe $a_1, a_2, \ldots$, to łączna cena tych wycinków wynosi $a_1 + a_2 + \ldots$

Po drugie, nazwijmy *Cennikiem* (*) cennik złożony z zasad 1, 2 i 3* oraz dla każdego kawałka folii A oznaczmy przez $\tilde{a}_A$ dolny kres cen, według *Cennika* (*), wszystkich zbiorów zawierających A. Wtedy zasadę pana Jordana pragnąłbym zastąpić przez

Zasadę 4*. Jeżeli A jest kawałkiem folii zawartym w kwadracie Q, takim że $\tilde{a}_A + \tilde{a}_{Q-A}$ = cena Q, to cena A wynosi $\tilde{a}_A$.

Pragnę podkreślić, że cennik obejmujący zasady 1, 2, 3* i 4* jest istotnie lepszy od *Cennika Euklidesa–Jordana.* To znaczy, że jeżeli cenę pewnego wycinka folii można ustalić posługując się *Cennikiem Euklidesa–Jordana*, to można tę cenę ustalić także za pomocą cennika obejmującego zasady 1, 2, 3* i 4*; w obu przypadkach otrzymamy tę samą cenę. Z drugiej jednak strony istnieją kawałki, których cenę można wyznaczyć posługując się cennikiem obejmującym zasady 1, 2, 3* i 4*, a nie można w obrębie *Cennika Euklidesa–Jordana.* Jako przykład takiego kawałka niech służy podzbiór kwadratu $<0, 1> \times <0, 1>$, złożony z punktów o obu współrzędnych niewymiernych. Cena jego, w ramach cennika obejmującego zasady 1, 2, 3* i 4* wynosi 1, natomiast w obrębie *Cennika Euklidesa–Jordana* nie można jej wyznaczyć (fachowcy mówią, że zbiór jest niemierzalny w sensie Jordana.)

— Dziękuję panu Lebusgue'owi. Proponuję przyjąć cennik złożony z zasad 1, 2, 3* i 4* jako obowiązujący w naszym Banku i nazwać go „miarą Lebesgue'a". Kto jest za? Wszyscy. I słusznie, jest to bowiem najlepsza miara. Dziękuję panom. A teraz do mierzenia złotej folii.

Związki fizyki z matematyką

Prof. dr Józef WERLE, członek korespondent PAN

Fizyka jest nauką ścisłą, bardzo mocno związaną z matematyką. Czy jednak zastanawialiście się, na czym te związki polegają? Dzięki czemu są one możliwe i płodne? Jaki jest ich charakter i znaczenie dla obu nauk? Czy możliwa jest prawdziwa, nowoczesna fizyka bez matematyki? Czy możliwa jest matematyka bez fizyki? Jak przedstawiały się związki między tymi naukami dawniej i jak przedstawiają się dziś? Czy każdą naukę, w której stosuje się wzory matematyczne, można tym samym zaliczyć do nauk ścisłych?

Oto garść pytań, na które niełatwo odpowiedzieć tylko na podstawie szkolnych lekcji fizyki i matematyki. W szkole średniej o takich problemach nie mówi się raczej wcale, a na studiach wyższych — tym bardziej nie. Cała sprawa należy więc z reguły do bardzo subiektywnej i ukrytej sfery podświadomości, a ta — wiadomo — lubi płatać figle naszej świadomości. Nie są to bynajmniej figle niewinne, lecz takie, które wyrządzają duże szkody społeczne. Ale to już inna historia, której lepiej nie opowiadać nieświadomym ofiarom tej sytuacji. Postarajmy się więc przede wszystkim pogłębić naszą świadomość.

Na laboratoryjnych, eksperymentalnych lekcjach fizyki robimy rzeczy na pozór nie mające nic wspólnego z matematyką: obserwujemy różne zjawiska przyrody, robimy doświadczenia, uczymy się posługiwania podstawowymi aparatami fizycznymi. Warto jednak zauważyć, że nie wystarczają nam jakościowe obserwacje, np. że włączenie prądu powoduje nagrzewanie się przewodnika oraz odchylenie igły stojącej obok busoli. Pytamy od razu o ilość wydzielanego w przewodniku ciepła, o wielkość odchylenia busoli, o ich zależność od napięcia i natężenia prądu, położenia busoli, własności przewodnika itp. Aby odpowiedzieć na takie pytania, musimy wykonać szereg odpowiednich pomiarów przy pomocy termometru, woltomierza, amperomierza itd. Wszystkie tego typu przyrządy, służące pierwotnie do czysto jakościowego wykrywania pewnych określonych efektów fizycznych, po odpowiednim wycechowaniu zamieniają się w przyrządy do mierzenia tychże efektów. Innymi słowy, każde zjawisko fizyczne staramy się zawsze opisać jak najściślej za pomocą odpowiednich cech ilościowych, czyli tak zwanych wielkości fizycznych. Jest rzeczą zdumiewającą, że to się udaje, i do tego — tak dobrze. Każdy pomiar ustala pewną ilościową relację między odpowiednimi wielkościami fizycznymi; relacja