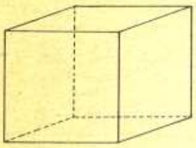
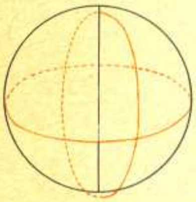
# Co to jest geometria wykreślna?

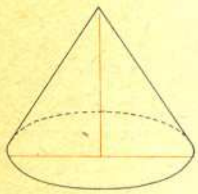
*Dr Jerzy LISIEWICZ*



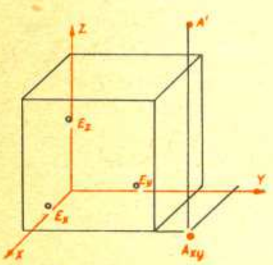
Rys. 1



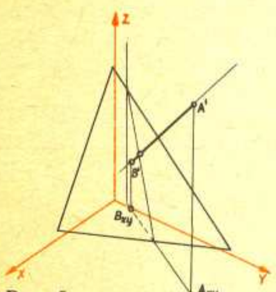
Rys. 2



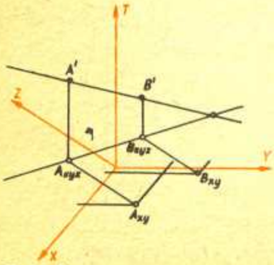
Rys. 3




Rys. 4




Rys. 5




Rys. 6

Od dawna, bo od czasów najwybitniejszych geometrów greckich: Pitagorasa Euklidesa, Archimedesa, Apolloniusza i Pappusa — wymieniliśmy ich razem, choć ostatniego dzieli od pierwszego osiem wieków historii — rozróżniano trzy rodzaje zagadnień typowych dla geometrii:

1. dowody twierdzeń opisujących własności figur;
2. rozwiązywanie problemów algebraicznych metodami geometrycznymi i odwrotnie;
3. rozwiązywanie zadań konstrukcyjnych.

W ciągu wieków zmieniło się niewiele. Tyle, że słuszniej jest mówić obecnie nie o rodzajach zagadnień, a o metodzie uprawiania geometrii.

**Metoda syntetyczna** — zastosowana konsekwentnie najpierw przez Euklidesa, doprowadzona do perfekcji przez Dawida Hilberta — coraz silniej reprezentowana jest w programach szkolnych.

**Metoda analityczna** — za prekursorów której należy uznać Pitagorasa i Apolloniusza — jest nieraz jedyną (zgodnie zresztą z życzeniem jej właściwego twórcy: Kartezjusza) stosowaną w uniwersytetach.

**Metoda wykreślna** — no, właśnie...

Pewną część zadań konstrukcyjnych omawia się marginesowo w szkole. Są to zresztą z reguły zagadnienia *płaskie*, to znaczy dotyczące jednej płaszczyzny. I nic dziwnego. Trzy czwarte szkolnego programu geometrii dotyczy płaszczyzny, a zadania konstrukcyjne stanowią tu jedynie ilustrację pojęć omówionych innymi metodami. Cała reszta to domena geometrii wykreślnej. Czym jest ta „reszta"? Są to najpierw konstrukcje dotyczące jednej płaszczyzny; konstrukcje te powinny się znaleźć w zasadzie w kursie geometrii rzutowej. Pozwalają one zilustrować tak ważne pojęcia teorii stożkowych, jak biegun, biegunowa, średnica, średnice sprzężone, asymptoty itp. Konstrukcje te stanowią przedmiot geometrii wykreślnej głównie dlatego, że potrzebne są jako element składowy innych konstrukcji. Pomińmy te zagadnienia. Wspomnę tylko, że jednym z wykorzystywanych tu przekształceń jest — znane ze szkoły średniej — powinowactwo osiowe.

Konstrukcje płaskie na dowolnej płaszczyźnie $\alpha$ zastąpić można konstrukcjami na płaszczyźnie rysunku, bo nawet jeżeli wykonujemy rysunek w pewnej skali, każdemu punktowi płaszczyzny $\alpha$ przyporządkowany jest dokładnie jeden punkt rysunku — i odwrotnie. Trudniej o takie wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie, gdy problem jest przestrzenny, a więc gdy na rysunku (z natury rzeczy płaskim) przedstawić trzeba figury nie leżące w jednej płaszczyźnie. Czy nie przesada? Wiadomo przecież, że na przykład rys. 1 przedstawia sześcian (taki „ładny", o ścianach kwadratowych), rys. 2 — kulę, a rys. 3 — stożek obrotowy. Owszem, to mogą być symbole (jak hieroglify egipskie) wymienionych brył. Łatwo jednak przekonać się, choćby rzucając cień odpowiednich modeli przy oświetleniu słonecznym, że:

bryła z rys. 1 jest sześcianem, bo ma sześć ścian, ale jakich — bez dodatkowych informacji nie wiadomo;

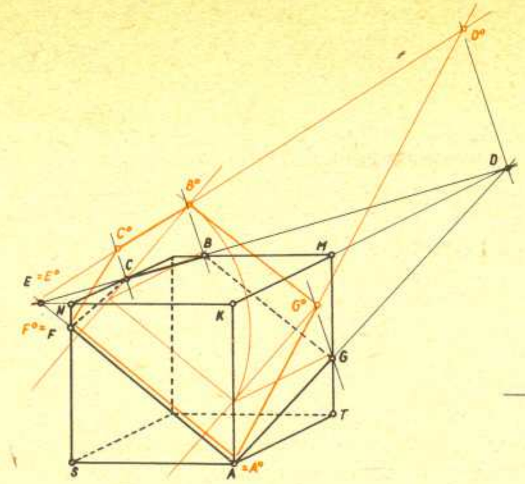
bryła z rys. 2 to w żadnym przypadku nie kula;

bryłę z rys. 3 można by nazwać stożkiem, ale to na pewno nie to, o czym Czytelnik myśli.

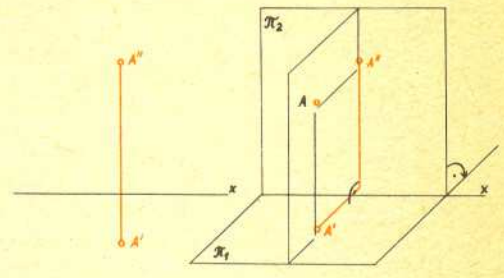
Rzut równoległy — bo tak się nazywa zastosowany tu sposób przyporządkowania punktom przestrzeni punktów płaszczyzny rysunku — dopiero wtedy staje się wzajemnie jednoznaczny, gdy rysunek zawiera pewne dodatkowe dane. Najczęściej, przy tak zwanej aksonometrycznej metodzie rzutowania, umieszcza się na rysunku rzut osi przestrzennego (zazwyczaj prostokątnego) układu współrzędnych z zaznaczeniem np. punktów jednostkowych osi. Rys. 4 przedstawia rzut aksonometryczny sześcianu (długość krawędzi = 2) i punktu $A$ o współrzędnych 2, 3, 4 (na rysunku oznaczenie $A$ nie występuje, nie ma tam bowiem narysowanego punktu $A$, a tylko jego rzut aksonometryczny).

Na rys. 5 pokazano konstrukcję punktu przebicia płaszczyzny $\alpha$ — zadanej śladami na płaszczyznach układu współrzędnych — prostą $AB$. Łatwo ekstrapolować tę metodę na przestrzenie wyższych wymiarów. Oto np. rzut aksonometryczny prostej $AB$ i konstrukcja przebicia tą prostą trójwymiarowej hiperpłaszczyzny $XYZ$ w przestrzeni czterowymiarowej (rys. 6). Może Czytelnik zechce wykreślić czterowymiarowy odpowiednik sześcianu?

Pozostańmy jeszcze przy rzucie równoległym i rozwiążmy zadanie konstrukcyjne, w którym zastosować trzeba sposoby charakterystyczne dla geometrii wykreślnej.



Rys. 7



Rys. 8

Zadanie: Dany w rzucie równoległym sześcian przeciąć płaszczyzną wyznaczoną przez trzy punkty $A$, $B$, $C$, przyjęte na krawędziach. Rozwiązanie: Kreślimy sześcian w rzucie równoległym (rys. 7) — a wiedząc, że jest to sześcian, możemy pominąć rzut osi układu współrzędnych — i przyjmujemy na krawędziach punkty $A$, $B$, $C$. W analizie trzeba ustalić kolejno:

a) fakt przecinania się prostej $BC$ z prostymi $KM$ i $KN$ (niech punktami przecięcia będą odpowiednio $D$ i $E$);
b) istnienie punktu $G$ przecięcia prostej $AD$ z krawędzią $MT$ i punktu $F$ przecięcia prostej $AE$ z krawędzią $NS$.

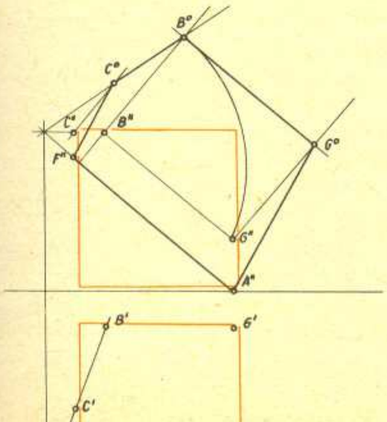
To wystarczy do znalezienia wielokąta przekroju: pięciokąta $AGBCF$. Na tym jednak nie koniec. Zauważmy, że frontowa ściana sześcianu zachowała w rzucie swój rzeczywisty kształt (kwadratu). Jeśli zatem obrócimy płaszczyznę przekroju wokół prostej $AF$ tak, by np. punkt $B$ znalazł się w płaszczyźnie tej frontowej ściany, to uzyskamy rzeczywisty kształt pięciokąta $AGBCF$. Obracamy więc (czyli — jak się to zwie technicznie — dokonujemy *kładu* płaszczyzny $ADF$ na płaszczyznę $AKN$), przy czym wystarczy obrócić jeden tylko punkt, np. $B$. Dlaczego? Bo prosta $AF$ (jako oś) i para punktów $B$, $B^0$ określają... powinowactwo osiowe, a wyznaczenie pozostałych punktów ($G^0$ i $C^0$) jest zagadnieniem płaskim. Wielokąt $A^0\ G^0\ B^0\ C^0\ F^0$ jest podobny do rzeczywistego wielokąta przekroju w takiej skali, w jakiej wykreślono kwadrat $AKNS$. Konstrukcję można by jeszcze uprościć korzystając na przykład z faktu, że rzut równoległy zachowuje równoległość prostych ($AG$ i $FC$, równoległe w przestrzeni, pozostają równoległe i na rysunku).

Uważny Czytelnik spostrzegł być może, że dla zapewnienia sobie wzajemnej jednoznaczności odwzorowania przestrzeni trójwymiarowej na płaszczyznę nie wystarczy z reguły podanie tylko punktu przyporządkowanego punktowi przestrzeni. I tak np. na rys. 4 dopiero zaznaczenie punktu $A_{XY}$ (rzut punktu, w którym prostopadła do płaszczyzny $XY$ przechodząca przez $A$ przebija tę płaszczyznę) określa dokładnie punkt $A$. W przypadku przestrzeni czterowymiarowej (rys. 6) potrzebne są prócz $A'$ jeszcze dwa punkty, np. $A_{XYZ}$ i $A_{XY}$. Uczniowie klasy VIII wiedzą, że istnieje nawet taki sposób odwzorowania przestrzeni trójwymiarowej na płaszczyznę, przy którym punktowi $A$ przestrzeni przyporządkowuje się parę punktów $A'$ i $A''$, nazywanych odpowiednio: poziomym i pionowym rzutem punktu $A$.

Konstrukcję takiego rzutu (jest to tak zwany rzut Monge'a) wyjaśnia rys. 8: rzutuje się prostokątnie punkt $A$ na dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny $\pi_1$ i $\pi_2$, a następnie przez obrót jednej z nich wokół krawędzi $x$ uzyskuje się jedną wspólną płaszczyznę rysunku. Konstrukcje w tym rzucie — poza ważnymi zastosowaniami praktycznymi — ćwiczą świetnie wyobraźnię przestrzenną. Proponuję zatem Czytelnikowi takie ćwiczenie: Na rys. 9 wykonano dokładnie tę samą konstrukcję, co na rys. 7, ale... w rzucie Monge'a. Proszę uzupełnić oznaczenia literowe rys. 9.

Istnieje jeszcze wiele sposobów odwzorowania przestrzeni na płaszczyznę, stosowanych w geometrii wykreślnej. Wystarczy wymienić choćby rzut cechowany używany w topografii, rzuty kartograficzne, czy wreszcie rzut środkowy, którego piękną próbkę widzieliśmy na okładce jednego z numerów «Delty». Omówienie tych rzutów wykracza poza ramy tego artykułu. I nie o to tu chodzi.

Starałem się opowiedzieć, czym jest geometria wykreślna. Żeby ją bliżej poznać, trzeba sięgnąć do... podręcznika.



Rys. 9