Liczby algebraiczne całkowite

Dr Maciej BRYŃSKI

Dowolna liczba całkowita n jest pierwiastkiem wielomianu $x-n$. Z drugiej strony nie każdy pierwiastek wielomianu o współczynnikach całkowitych musi być liczbą całkowitą; na przykład pierwiastek wielomianu $2x-1$ nie jest liczbą całkowitą, a pierwiastki wielomianu x^2-2 nie są nawet liczbami wymiernymi. Czy można z postaci wielomianu wywnioskować, że jego wymierny pierwiastek musi być liczbą całkowitą? Okazuje się, że można. Wynika to z następującego twierdzenia:

Jeśli liczba wymierna zapisana w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

to p jest dzielnikiem współczynnika a_0, a q jest dzielnikiem współczynnika a_n.

Dla uzasadnienia tego twierdzenia zauważmy, że liczba $\frac{p}{q}$ spełnia warunek:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0,$$

mnożąc więc obustronnie przez q^n otrzymamy

$$a_n p^n + a_n p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Stąd

$$a_0 q^n = -a_n p^n - a_{n-1} p^{n-1} q - \ldots - a_1 p q^{n-1}.$$

Liczba po prawej stronie tej równości jest podzielna przez p, zatem p dzieli $a_0 q^n$. Ponieważ założyliśmy, że $\left(\frac{p}{q}\right)$ jest ułamkiem nieskracalnym, więc p i q nie mają wspólnych czynników różnych od 1. Wobec tego z faktu, że p dzieli $a_0 q^n$ wynika, że p dzieli a_0. Podobnie z równości

$$a_n p^n = -a_{n-1} p^{n-1} q - \ldots - a_1 p q^{n-1} - a_0 q^n$$

otrzymujemy wniosek, że q dzieli a_n.
Z twierdzenia tego wynika, że każdy pierwiastek wymierny wielomianu

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

o współczynnikach całkowitych musi być liczbą całkowitą będącą dzielnikiem liczby a_0 (oczywiście wielomian taki może mieć również pierwiastki niewymierne).
Jak zauważyliśmy na początku, każda liczba całkowita jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych i współczynniku przy najwyższej potędze równym 1, a z poprzedniego zdania wynika, że spośród wszystkich liczb wymiernych własność ta przysługuje jedynie liczbom całkowitym. Pozwala to sądzić, że pierwiastki wielomianów o współczynnikach całkowitych i współczynniku przy najwyższej potędze równym 1 zasługują na szczególną uwagę. Liczby takie nazywamy *liczbami algebraicznymi całkowitymi*. Dokładniej: mówimy że a jest liczbą algebraiczną całkowitą, jeśli istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

którego a jest pierwiastkiem.
Liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą algebraiczną całkowitą, gdyż jest pierwiastkiem wielomianu x^2-2, natomiast $\frac{1}{2}$ nie jest liczbą algebraiczną całkowitą. Przy okazji warto wiedzieć, że istnieją liczby rzeczywiste, które nie tylko nie są liczbami algebraicznymi całkowitymi, ale nie są pierwiastkami żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych. Liczby takie nazywamy przestępnymi; przykładem liczby przestępnej jest liczba π (wyrażająca stosunek długości połowy okręgu do długości promienia).

Powróćmy jednak do liczb h.lab geraicznych acłkowitycOkazuje się, że wiele własności zwykłych liczb całkowitych (matematycy zajmujący się tą problematyką mówią: liczb całkowitych wymiernych) przysługuje liczbom algebraicznym całkowitym.
Niestety nie ma metody bezpośredniego wskazania, które z liczb rzeczywistych są, a które nie są liczbami algebraicznymi całkowitymi. Znajdując odpowiedni wielomian możemy bez trudu stwierdzić, że liczbami algebraicznymi całkowitymi są: $1+\sqrt{2}$, $2-3\sqrt{3}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Istotnie, liczby te są kolejno pierwiastkami wielomianów: x^2-2x-1, $x^2-4x-23$, x^2-x-1. O ile algebraiczna całkowitość pierwszych dwu z tych liczb jest rzeczą, którą Czytelnik z pewnością odgadłby na pierwszy rzut oka, o tyle fakt, że $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ jest liczbą algebraiczną całkowitą, może wydać się dość dziwny (liczba ta ma mianownik, którego nie można się pozbyć!) i przypadkowy (okazuje się, że np. $\frac{1+2\sqrt{5}}{2}$ nie jest liczbą algebraiczną całkowitą!). Wątpliwości te usuniemy przytaczając twierdzenie charakteryzujące liczby algebraiczne całkowite pewnej szczególnie prostej postaci:
Niech $d \neq 1$ będzie liczbą całkowitą niepodzielną przez kwadrat żadnej liczby całkowitej $c \neq 1$. Jeśli $d = 4k+2$ lub $d = 4k+3$, to wśród liczb postaci $a+b\sqrt{d}$ (a, b — dowolne liczby wymierne) liczbami algebraicznymi całkowitymi są dokładnie te, dla których a i b są liczbami całkowitymi. Jeśli natomiast $d = 4k+1$, to wśród liczb $a+b\sqrt{d}$ (a, b — liczby wymierne) liczbami algebraicznymi całkowitymi są dokładnie liczby $a+b\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}$, gdzie a, b są całkowite.

Dowodu tego twierdzenia nie będziemy tu przytaczać, można go znaleźć np. w interesującej książce G. Birkhoffa i S. Mac Lane'a *Przegląd algebry współczesnej*. Zauważmy, że w każdym z przypadków, o których mówi to twierdzenie, w zbiorze liczb postaci $a+b\sqrt{d}$ (d ustalone) podzbiór liczb algebraicznych całkowitych ma własności rachunkowe podobne do zbioru liczb całkowitych (tych zwykłych, wymiernych), w szczególności suma, a także różnica oraz iloczyn liczb algebraicznych całkowitych z tego zbioru, jest liczbą algebraiczną całkowitą. Natomiast iloraz liczb algebraicznych całkowitych na ogół nie jest liczbą algebraiczną całkowitą, np

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} = 2+\frac{3}{2}\sqrt{2},$$

a to nie jest liczba algebraiczna całkowita na podstawie cytowanego wyżej twierdzenia.
Oczywiście analogiczne własności mają działania arytmetyczne w zbiorze liczb całkowitych.
A oto przeniesienie jeszcze jednego prawa znanego dla liczb całkowitych: każda liczba wymierna jest ilorazem $\frac{m}{n}$, gdzie m jest liczbą całkowitą, n — liczbą naturalną. Wykażemy, że każda liczba będąca pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych jest ilorazem liczby algebraicznej całkowitej przez liczbę naturalną. Przypuśćmy, że a jest pierwiastkiem wielomianu

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ są liczbami całkowitymi. Bez straty ogólności możemy przypuścić, że a_n jest liczbą naturalną, gdyż w przeciwnym razie $-a_n$ byłoby liczbą naturalną, przy czym a oczywiście jest również pierwiastkiem wielomianu

$$-a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_1 x - a_0.$$

Mamy:

$$a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0 = 0,$$

więc

$$a_n^n a^n + a_n^{n-1} a_{n-1} a^{n-1} + \ldots + a_n^{n-1} a_1 a + a_n^{n-1} a_0 = 0,$$

$$(a_n a)^n + a_{n-1}(a_n a)^{n-1} + a_{n-2}a_n(a_n a)^{n-2} + \ldots + a_1 a_n^{n-2}(a_n a) + a_n^{n-1} a_0 = 0,$$

a stąd wnosimy, że liczba $a_n a$ jest pierwiastkiem wielomianu

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}a_n x^{n-2} + \ldots a_1 a_n^{n-2} x + a_n^{n-1} a_0.$$

Ponieważ wielomian ten ma wszystkie współczynniki całkowite, a współczynnik przy najwyższej potędze równy jest jedności, więc $a_n a$ jest liczbą algebraiczną całkowitą, stąd oczywiście a jest ilorazem tej liczby algebraicznej całkowitej przez liczbę naturalną a_n.

Rozwiązanie zadania F 8.

Ponieważ jedynymi siłami zewnętrznymi działającymi na układ kulka-równia są siły ciężkości kulki i równi oraz siła reakcji stołu, środek ciężkości układu nie może przesunąć się w kierunku poziomym. Staczaniu się zatem kulki musi towarzyszyć przesuwanie się równi wzdłuż stołu.

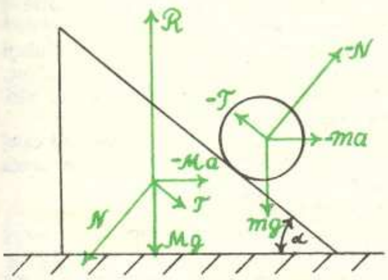
Zadanie to można rozwiązywać na wiele sposobów, najprościej jednak w układzie odniesienia związanym z poruszającą się równią. W tym układzie tor ruchu kulki jest dobrze znany. Ale uwaga! Tak wybrany układ jest układem przyspieszonym, podobnie jak na przykład układ odniesienia związany z ruszającym lub hamującym autobusem. W układzie przyspieszonym, jak wiecie również z własnego doświadczenia, występują siły bezwładności. Równe są one $-ma$, gdzie a jest przyspieszeniem układu, a m masą badanego ciała.

Wymieńmy wszystkie siły działające na kulkę i równię. Na równię działają siły (układ spoczynku równi):

Mg — siła ciężkości,
R — reakcja stołu na nacisk równi, prostopadła do podstawy równi,
N — siła nacisku kulki, prostopadła do powierzchni równi,
T — siła tarcia między równią a kulką, równoległa do przeciwprostokątnej,
$-Ma$ — siła bezwładności, równoległa do podstawy równi.

Na kulkę działają siły:
mg — siła ciężkości,
$-$T — siła tarcia,
$-$N — reakcja równi na nacisk kulki,
$-ma$ — siła bezwładności.

W wybranym układzie odniesienia równia spoczywa, dlatego wypadkowa siła działająca na równię wynosi 0.



Kulka porusza się względem równi z przyspieszeniem b skierowanym równolegle do przeciwprostokątnej. Natomiast wypadkowa sił działających na kulkę w kierunku prostopadłym do powierzchni równi równa się 0.
Otrzymujemy następujące równania:
1° równowaga sił działających na równię w kierunku:
a) poziomym
$N\sin\alpha = T\cos\alpha - Ma$,
b) pionowym (niepotrzebne w dalszej części zadania)
$R = N\cos\alpha + T\sin\alpha + Mg$;
2° ruch postępowy kulki wzdłuż równi:
$mg\sin\alpha - ma\cos\alpha - T = mb$;
3° ruch obrotowy kulki wokół osi przechodzącej przez jej środek masy (r — promień kulki, ε — przyspieszenie kątowe)

$$Tr = \frac{2}{5} mr^2\varepsilon;$$

4° związek między ruchem postępowym i obrotowym (toczenie bez poślizgu):
$b = \varepsilon r$;
5° równowaga sił działających na kulkę w kierunku prostopadłym do równi:
$N + ma\sin\alpha = -mg\cos\alpha$.
Z rozwiązania układu równań otrzymujemy:

$$a = -\frac{\frac{5}{14} mg\sin 2\alpha}{(M+m) - \frac{5}{7} m\cos^2\alpha}.$$

Tor kulki będzie dla obserwatora stojącego przy stole linią prostą nachyloną do stołu pod kątem

$$\beta = \alpha - \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\alpha - \frac{b}{a\sin\alpha}\right).$$