Algorytmy cz. III

Dr Andrzej SKOWRON

Okazuje się, że można podać taki algorytm, przy pomocy którego możemy rozwiązać wiele zadań. Algorytm ten będzie jednocześnie modelem bardzo prostej maszyny cyfrowej jednoadresowej. Zajmiemy się konstrukcją takiego algorytmu. Rozpoczniemy od określenia jego pamięci. Przyjmiemy, że dysponujemy miejscami o nazwach **l**, **r**, **a**, **0**, **1**, **2**, ..., **1023**, których zawartościami mogą być liczby 0, 1, ..., $2^{14}-1$ (dla **l** dopuszczalnymi zawartościami są liczby 0, ... 1023). Miejsca o nazwach **l**, **r**, **a** będziemy nazywać odpowiednio: licznikiem rozkazów, rejestrem rozkazów, akumulatorem.

Jako czynności elementarne przyjmiemy dla $\mathbf{b} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{1023}\}$:

Czynności przesyłania

1. czynność polegającą na przepisaniu zawartości akumulatora w miejscu o nazwie **b** (oznaczenie czynności: → **b**),
2. czynność polegającą na przepisaniu zawartości miejsca **b** w akumulatorze (oznaczenie czynności: **b** →),

Czynności arytmetyczne

różnica w zbiorze liczb naturalnych określona jest następująco:

$$n \dot{-} m = \begin{cases} n-m, & \text{jeśli } n \geqslant m \\ 0, & \text{jeśli } n < m \end{cases}$$

3. czynność polegającą na zapisaniu sumy (modulo 2^{14}) zawartości akumulatora i miejsca o nazwie **b** w akumulatorze (oznaczenie czynności: + **b**),
4. czynność polegającą na zapisaniu różnicy zawartości akumulatora i miejsca o nazwie **b** w akumulatorze (oznaczenie czynności: − **b**),
5. czynność polegającą na zapisaniu iloczynu (modulo 2^{14}) zawartości akumulatora i miejsca o nazwie **b** w akumulatorze (oznaczenie czynności ·**b**),

Czynności sterujące

skok bezwarunkowy

6. czynność polegającą na zapisaniu w liczniku rozkazów liczby b (oznaczenie czynności: !b),

skok warunkowy

7. czynność polegającą na zapisaniu w liczniku rozkazów liczby b, jeśli zawartość akumulatora jest różna od zera; w przypadku, gdy zawartość akumulatora jest równa 0, nie zmienia się zawartości żadnego z miejsc (oznaczenie czynności: ?b),

stop

8. czynność, po wykonaniu której nie zmienia się zawartość żadnego z miejsc (oznaczenie czynności STOP).

Zbiór określonych wyżej czynności elementarnych oznaczymy przez R. Do zbioru czynności elementarnych zaliczymy jeszcze następujące czynności:

9. czynność polegającą na zapisaniu w liczniku rozkazów jego zawartości zwiększonej o 1 (modulo 1024) (oznaczenie czynności: **l** ← $l+1$
10. czynność polegającą na zapisaniu w rejestrze rozkazów zawartości miejsca, którego nazwa jest zawartością licznika rozkazów (oznaczenie czynności: **r** ← c(c(l))).

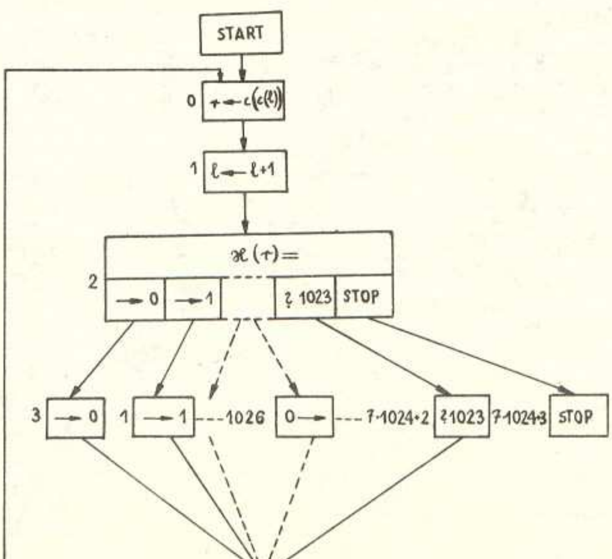
Będziemy zakładać, że do zbioru czynności elementarnych należy czynność polegająca na sprawdzeniu, jaka jest wartość funkcji $\varkappa$ w punkcie równym zawartości rejestru rozkazów **r**. Graficznie będziemy ją przedstawiać następująco:

$\varkappa(r)$ =				
→ **0**	→ **1**	...	? **1023**	**STOP**

Określamy funkcję $\varkappa\colon \{0, 1, \dots, 2^{14}-1\} \to R$ nazywaną funkcją dekodującą. Niech $I_j = \{n \in N : j \cdot 2^{11} \leqslant n < (j+1) \cdot 2^{11}\}$ dla $j = 0, \dots, 7$. Przyjmiemy

$$\varkappa(n) = \begin{cases} \to \mathrm{n} & \text{jeśli } n \in I_0, \\ \mathrm{b} \to \ (\text{gdzie } b = n-2^{11}), & \text{jeśli } n \in I_1 \\ -\mathrm{b} \ (\ ,, \ b = n-2\cdot 2^{11}), & ,, \ n \in I_2, \\ +\mathrm{b} \ (\ ,, \ b = n-3\cdot 2^{11}), & ,, \ n \in I_3, \\ \cdot\mathrm{b} \ (\ ,, \ b = n-4\cdot 2^{11}), & ,, \ n \in I_4, \\ !\mathrm{b} \ (\ ,, \ b = n-5\cdot 2^{11}), & ,, \ n \in I_5, \\ ?\mathrm{b} \ (\ ,, \ b = n-6\cdot 2^{11}), & ,, \ n \in I_6, \\ \mathrm{STOP} & ,, \ n \in I_7. \end{cases}$$

Będziemy zajmować się następującą siecią działań:



Rozważmy obliczenie rozpoczynające się od takiego stanu pamięci, że zawartości miejsc: **1**, od **3** do **23** i od **30** do **33** są takie, jak w tabeli 1.

Tabela 1

Nazwa miejsca	Zawartość
1	3
3	$2^{11}+31$
4	22
5	$2^{11}+30$
6	$6\cdot 2^{11}+8$
7	$7\cdot 2^{11}$
8	$2\cdot 2^{11}+21$
9	30
10	$2^{11}+23$
11	$3\cdot 2^{11}+21$
12	14
13	23
14	0
15	$2\cdot 2^{11}+22$
16	$6\cdot 2^{11}+18$
17	$5\cdot 2^{11}+5$
18	$3\cdot 2^{11}+22$
19	22
20	$5\cdot 2^{11}+5$
21	1
22	0
23	$2^{11}+30$
30	3
31	20
32	19
33	26

Tabela 2

Numer czynności wykonywanej	Nazwa miejsca	Zawartość miejsca	Numer czynności następnej	Jaka jest czynność następna
0	**r**	$2^{11}+31$	1	
1	**l**	4	2	
2	—	—	1058	**31 →**
1058	**a**	20	0	
0	**r**	22	1	
1	**l**	5	2	
2	—	—	25	**→ 22**
25	**22**	20	0	
0	**r**	$2^{11}+30$	1	
1	**l**	6	2	
2	—	—	1057	**30 →**
1057	**a**	3	0	
0	**r**	$6\cdot 2^{11}+8$	1	
1	**l**	7	2	
2	—	—	6155	**?8**
6155	**l**	8	0	
0	**r**	$2\cdot 2^{11}+21$	1	
1	**l**	9	2	
2	—	—	2072	**−21**
2072	**a**	2	0	
0	**r**	30	1	
1	**l**	10	2	
2	—	—	33	**30.**
33	**30**	2	0	

W tabeli 2 przedstawiono, jakim zmianom ulegają zawartości miejsc pamięci w trakcie obliczenia. Przyjęto umowę, że przy numerze wykonywanej czynności wypisywane są jedynie zawartości tych miejsc, które ulegają zmianie po wykonaniu tej czynności. Uwzględniono tylko kilka początkowych stanów obliczenia. Czytelnik z łatwością uzupełni tę tabelę. Proponujemy Czytelnikowi wykonanie takiego ćwiczenia jak wyżej, gdy zawartości miejsc **1**, **3**, ..., **23** są jak poprzednio, a zawartości miejsc **30**, ..., **35** są równe odpowiednio 5, 126, 21, 0, 33, 1228. Po wykonaniu tego ćwiczenia zauważy Czytelnik z pewnością, że zawartość miejsc **1**, **3**, ..., **23** zostały tak dobrane, iż po zakończeniu obliczenia rozpoczynającego się od stanu początkowego, charakteryzującego się tym, że zawartości miejsc **1**, **3**, ..., **23** są takie jak w tabeli 1, otrzymujemy stan końcowy obliczenia, przy czym zawartością miejsca **22** w stanie końcowym jest największa z liczb $n_1, \ldots, n_k$, gdzie k jest zawartością miejsca **30**, a $n_1, \ldots, n_k$ są odpowiednio zawartościami miejsc **31**, ..., **30**+k w stanie początkowym.

Czytelnik jest z pewnością niezbyt zadowolony z tego, że dla przeprowadzenia obliczenia musiał wykonać wiele czynności elementarnych. Pocieszeniem jest fakt, że maszyna cyfrowa wykonuje takich czynności kilkanaście tysięcy, kilkaset tysięcy lub nawet kilka milionów w ciągu sekundy! Pokazaliśmy, że przy pomocy skonstruowanego algorytmu (o sieci działań jak na rysunku) umiemy rozwiązać następujące zadanie: wyszukać największą liczbę naturalną z zadanego ciągu skończonego liczb naturalnych (oczywiście przy pewnych ograniczeniach — jakich?). Proponujemy Czytelnikom wykonanie następujących ćwiczeń:

Ćwiczenie 1. Pokazać, że przy użyciu algorytmu (o sieci działań jak na rysunku) można rozwiązać zadanie polegające na obliczeniu sumy wyrazów skończonych ciągów liczb naturalnych. Przy jakich założeniach zadanie można rozwiązać?

Ćwiczenie 2. Pokazać, że przy użyciu algorytmu (o sieci działań jak na rysunku) można rozwiązać zadanie polegające na uporządkowaniu (według wielkości) wyrazów skończonych ciągów liczb naturalnych. Przy jakich założeniach zadanie można rozwiązać?

Rozwiązanie zadania M 22.
Za pomocą cyrkla i liniału możemy zbudować kąt dwa razy większy od danego kąta α.

Możemy również zbudować kąt równy $\frac{1}{3}$ kąta półpełnego (tzn. kąt β o mierze 60° — konstrukcja trójkąta równobocznego). Zauważmy, że różnica $\beta - 2\alpha$ jest kątem szukanym, który wobec tego można skonstruować za pomocą cyrkla i liniału, mając kąt α.