Co znaczy „teoria rozstrzygalna"

demonstruje na jednym przykładzie *doc. dr hab. Lesław W. SZCZERBA*

W praktyce szkolnej występują, ogólnie biorąc, dwa typy zadań. Pierwszy z nich wymaga sprawności rachunkowej, a drugi — pewnej jeszcze pomysłowości. Przykładem pierwszego typu zadań jest następujące polecenie:
Oblicz sumę

$$\begin{array}{r} 119\,210 \\ 24\,443 \\ 8\,129 \\ +5\,195\,215 \\ \hline \end{array}$$

Takie „słupki" nie wymagają od rozwiązującego żadnej inwencji — wystarczy znać sposób postępowania i nie pomylić się w rachunkach, a wynik będzie poprawny. Liczby mogą być większe, może też być ich dużo więcej. Zadanie stałoby się wówczas żmudniejsze, a rozwiązanie go zajęłoby więcej czasu i papieru; nikt jednakże (poza pierwszoklasistami) nie nazwałby go trudnym.

Są jednak i takie zadania, których w pierwszej chwili nie potrafimy rozwiązać. Zdarza się, że zadanie, pomimo prostego sformułowania, sprawia rozwiązującemu spore trudności. Czasem, pomimo wielu wysiłków, nie udaje się takiego zadania rozwiązać. Bywa, że ktoś potem podsunie nam jakiś pomysł i ku naszemu niezmiernemu wstydowi rozwiązanie okaże się zdumiewająco proste. Najistotniejszy jest więc tu pomysł. Zadania te zaczynają się często od słów „udowodnić, że", „sprawdzić, czy" itp. Krótko mówiąc, znamy metodę rozwiązywania zadań „na dodawanie", a metody rozwiązywania wielu innych typów zadań nie znamy. Nie znaczy to jednak, że nie ma standardowej metody rozwiązywania pewnych typów zadań zaczynających się od słów „sprawdzić, czy".

Weźmy dla przykładu zadania typu: „Sprawdzić, czy istnieje liczba rzeczywista większa od a i mniejsza od b".

Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, gdy $a < b$, zaś przecząca, gdy $b \leqslant a$. Gdybyśmy chcieli powiedzieć to bardziej formalnie, moglibyśmy stwierdzić, że wyrażenie

$$(*) \qquad \bigvee_x (a < x \wedge x < b)$$

jest równoważne wyrażeniu $a < b$.

Zatem i dla tego typu zadań istnieje mechaniczna metoda rozwiązywania. Metoda ta polega na eliminacji z wyrażenia (*) kwantyfikatora.

Taka eliminacja kwantyfikatora możliwa jest dla dużo ogólniejszej klasy wyrażeń, a mianowicie wszystkich wyrażeń postaci

$$(**) \qquad \bigvee_x \Phi,$$

gdzie w formule Φ orzekającej coś o uporządkowaniu liczb rzeczywistych nie występuje już ani jeden kwantyfikator. Jeśli zmienna x w ogóle nie występuje w formule Φ, to kwantyfikator nie jest potrzebny i formuła $\bigvee_x \Phi$ jest równoważna formule Φ. Możemy zatem założyć, że zmienna x w formule Φ występuje. Rozpatrując różne formuły Φ, wypada zacząć od najprostszych. Mogą to być formuły $x = a$, $a = x$, $a < x$, $x < a$, (gdzie a jest zmienną różną od x), $x = x$ oraz $x < x$. Formuły takie nazywają się atomicznymi. Wyrażenia $\bigvee_x x = a$, $\bigvee_x a = x$, $\bigvee_x a < x$, $\bigvee_x x < a$ oraz $\bigvee_x x = x$ są prawdziwe dla dowolnego a. Wobec tego każdą z tych formuł możemy zastąpić po prostu P (od „Prawda"). Natomiast zdanie $\bigvee_x x < x$ jest zawsze fałszywe. Zastąpimy je F (od „Fałsz"). Wyeliminowaliśmy zatem kwantyfikator z formuł postaci $\bigvee_x \Phi$, gdzie Φ jest formułą atomiczną. Przejdźmy teraz do formuł bardziej skomplikowanych. Załóżmy, że Φ jest koniunkcją formuł atomicznych. Jeśli Φ daje się przedstawić jako koniunkcja dwu członów: $\Phi \equiv \Psi \wedge \Xi$, przy czym w Ψ nie występuje zmienna x, to wyrażenie $\bigvee_x \Phi$ jest równoznaczne wyrażeniu $\Psi \wedge \bigvee_x \Xi$. W dalszym ciągu możemy zatem założyć, że w każdej formule atomicznej formuły Φ występuje x. Jeżeli któryś z członów koniunkcji ma postać $x = x$, to możemy go bezkarnie opuścić. Jeśli z kolei w formule Φ występuje formuła atomiczna $x = a$ lub $a = x$, to we wszystkich miejscach, gdzie pojawia się x, możemy napisać a i opuścić zbędny już kwantyfikator. Jeśli wreszcie wśród członów koniunkcji występuje formuła $x < x$, to wyrażenie $\bigvee_x \Phi$ jest zawsze fałszywe. Jeśli natomiast nie ma tam ani formuły $x < x$, ani też żadnej równości, to dzięki łączności i przemienności koniunkcji

$$[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)],$$
$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

możemy formułę $\bigvee_x \Phi$ przedstawić w jednej z postaci:

$$\bigvee_x a_0 < x \wedge \ldots \wedge a_m < x,$$

Rozwiązanie zadania M19

Zauważmy, że liczby $n = k = 1$ i $n = k = 3$ spełniają równość (a), zaś liczby $n = 2$ i $n = 4$ nie spełniają (a) przy żadnym naturalnym k. Przypuśćmy, że liczba $n \geqslant 5$ spełnia (a) przy pewnym k naturalnym. Liczby $5!, 6!, \ldots, n!$ są podzielne przez 5, a więc liczba $1!+2!+3!+4!+5!+ \ldots + n! = 1+2+6+24+5!+ \ldots +n! = 33+5!+ \ldots +n!$ daje przy dzieleniu przez 5 resztę 3.
Kwadrat liczby naturalnej przy dzieleniu przez 5 daje resztę 0, 1 lub 4, co wynika z faktu, że każda liczba naturalna jest postaci $5m$, $5m+1$, $5m+2$, $5m+3$ lub $5m+4$ (m — liczba całkowita) oraz $(5m)^2 = 5 \cdot 5m^2+0$, $(5m+1)^2 = 5(5m^2+2m)+1$, $(5m+2)^2 = 5(5m^2+4m)+4$, $(5m+3)^2 = 5(5m^2+6m+1)+4$, $(5m+4)^2 = 5(5m^2+8m+3)+1$.
Gdyby więc przy pewnym naturalnym k i $n \geqslant 5$ zachodziła równość (a), to lewa strona dawałaby przy dzieleniu przez 5 resztę 3, prawa zaś — 0, 1 lub 4. Otrzymana sprzeczność wraz z początkowymi uwagami wykazuje, że tylko liczby $n = k = 1$ i $n = k = 3$ spełniają równość (a), a oczywiście spełniają one równość (b).

$$\bigvee_x x < b_0 \wedge \ldots \wedge x < b_n,$$

$$\bigvee_x a_0 < x \wedge \ldots \wedge a_m < x \wedge x < b_0 \wedge \ldots \wedge x < b_n.$$

W dwu pierwszych przypadkach formuła jest zawsze prawdziwa, a w trzecim jest równoważna formule

$$a_0 < b_0 \wedge \ldots \wedge a_0 < b_n \wedge \ldots \wedge a_m < b_0 \wedge \ldots \wedge a_m < b_n.$$

Ten przypadek eliminacji kwantyfikatora jest o tyle ważny, że wszystkie pozostałe można do niego sprowadzić.
Weźmy zupełnie dowolną formułę Φ (w której nie występują kwantyfikatory). Pierwszy krok eliminacji kwantyfikatora z formuły $\bigvee_x \Phi$ polega na usunięciu implikacji i równoważności za pomocą wzorów

$$(p \leftrightarrow q) \equiv [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)],$$
$$(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q).$$

Z kolei przy pomocy praw de Morgana ($\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ oraz $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$) wprowadzamy negację możliwie najgłębiej, a więc tak, aby negacja mogła stać tylko przed formułą atomiczną.
Następnie eliminujemy negację zupełnie za pomocą wzorów

$$\sim\sim p \equiv p,$$
$$[\sim(a = b)] \equiv [(a < b) \vee (b < a)],$$
$$[\sim(a < b)] \equiv [(a = b) \vee (b < a)].$$

Teraz, korzystając z prawa rozdzielności alternatywy

$$[(p \vee q) \wedge r] \equiv [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)],$$

sprowadzamy otrzymaną formułę do alternatywy członów $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$, z których każdy jest koniunkcją formuł atomicznych. Mamy zatem równoważność

$$\bigvee_x \Phi \equiv [(\bigvee_x \Phi_0) \vee \ldots \vee (\bigvee_x \Phi_n)].$$

Z każdej formuły $\bigvee_x \Phi_i$ z osobna potrafimy wyeliminować kwantyfikator i wskazać bezkwantyfikatorową formułę Φ_i' równoważną formule $\bigvee_x \Phi_i$. Wówczas

$$\bigvee_x \Phi \equiv \Phi_0' \vee \ldots \vee \Phi_n'.$$

Ostatecznie więc *dla dowolnej formuły bezkwantyfikatorowej Φ potrafimy wskazać formułę bezkwantyfikatorową Φ' taką, że*

$$\bigvee_x \Phi \equiv \Phi'.$$

Można wyeliminować nie tylko kwantyfikator egzystencjalny, ale również ogólny. W tym celu należy posłużyć się prawem

$$\bigwedge_x \Phi \equiv \sim \bigvee_x \sim \Phi,$$

również zwanym prawem de Morgana. Jeżeli Φ jest formułą bezkwantyfikatorową, to i $\sim \Phi$ jest formułą bezkwantyfikatorową, a zatem potrafimy podać formułę Φ', również bezkwantyfikatorową, taką, że $\bigvee_x \sim \Phi \equiv \Phi'$. Wobec tego $\bigwedge_x \Phi \equiv \sim \Phi'$. Można poza tym eliminowa więcej niż jeden kwantyfikator. Należy to po prostu robić po kolei, zaczynając od kwantyfikatorów «najbardziej wewnętrznych», to znaczy takich, że w ich zakresie nie ma innych kwantyfikatorów.
Ostatecznie więc dla dowolnej formuły potrafimy wskazać równoważną jej formułę bezkwantyfikatorową; innymi słowy — potrafimy podać warunki konieczne i dostateczne na to, by wyjściowa formuła zachodziła dla liczb rzeczywistych. Jeśli wyjściowa formuła nie ma zmiennych wolnych (nie związanych kwantyfikatorami), to i równoważna jej formuła bezkwantyfikatorowa nie będzie miała zmiennych wolnych, będzie się zatem składać z formuł atomicznych postaci $a < b$ i $a = b$, gdzie a i b są nazwami konkretnych liczb rzeczywistych. W takim przypadku nietrudno obliczyć wartość logiczną, a więc udowodnić lub obalić zdanie (to znaczy formułę bez zmiennych wolnych), które mieliśmy na początku.

To, co zostało udowodnione, matematycy ujmują w zdaniu:

Teoria porządku liczb rzeczywistych jest rozstrzygalna, bo istnieje (wskazaliśmy ją) *metoda rozstrzygnięcia, czy dowolnie wskazane zdanie jest twierdzeniem tej teorii, czy też nie jest.*

Warto zauważyć, że do dowodu poprawności opisanej wyżej metody (dowodu, którego nie przeprowadziłem tu w szczegółach, pozostawiając go z lenistwa Czytelnikowi) potrzebne są tylko podane obok własności porządku liczb rzeczywistych.

Oznacza to, że każde zdanie orzekające o uporządkowaniu liczb rzeczywistych możemy udowodnić w oparciu o aksjomaty 0.—5. (o ile oczywiście jest prawdziwe). Dowodu takiego dostarczy nam opisana powyżej metoda. Możemy zatem powiedzieć, że zdania 0.—5. stanowią aksjomatykę teorii uporządkowania liczb rzeczywistych.

Dyskusja problemu b) F7

b) Przypadek identycznych kul toczących się ku sobie z jednakowymi szybkościami. Zderzające się kule wymienią się składowymi pędu, prostopadłymi do płaszczyzny styku. Stąd wynika związek:

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{b}{2R}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,$$

$$\frac{dN}{d\theta} = \frac{dN}{db} R \sin\frac{\theta}{2} = Rc \sin\frac{\theta}{2}.$$

albo:

$$\frac{dN}{d\frac{\theta}{2}} = 2Rc\sin\frac{\theta}{2}.$$

Przypadek b) jest zatem równoważny pierwszemu przypadkowi rozważanemu w układzie środka masy układu zderzających się kul. Dla identycznych kul kąt rozproszenia w ich układzie środka masy jest dwukrotnie większy niż w układzie, w którym jedna z kul spoczywa.

Przykład 1

$$\bigvee_x \sim (x < 0 \rightarrow x < \pi) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_x \sim (\sim x < 0 \vee x < \pi) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_x (\sim\sim x < 0 \wedge \sim x < \pi) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_x [x < 0 \wedge (x = \pi \vee \pi < x)] \equiv$$
$$\equiv \bigvee_x [(x < 0 \wedge x = \pi) \vee (x < 0 \wedge \pi < x)] \equiv$$
$$\equiv [\bigvee_x (x = \pi \wedge x < 0)] \vee [\bigvee_x (\pi < x \wedge$$
$$\wedge x < 0)] \equiv$$
$$\equiv \pi < 0 \vee \pi < 0 \equiv$$
$$\equiv F \vee F \equiv F$$

Przykład 2

$$\bigwedge_x \{[\bigvee_y x < y \wedge y < 0] \rightarrow x < \pi\} \equiv$$
$$\equiv \bigwedge_x (x < 0 \rightarrow x < \pi) \equiv$$
$$\equiv \sim \bigvee_x \sim (x < 0 \rightarrow x < \pi) \equiv$$
$$\equiv \sim (\pi < 0 \vee \pi < 0) \equiv$$
$$\equiv \sim F \equiv P$$

0. $\bigvee_{xy} x \neq y,$

1. $\bigwedge_x x < x,$

2. $\bigwedge_{xy} x < y \vee x = y \vee y < x,$

3. $\bigwedge_{xyz} x < y \wedge y < z \rightarrow x < y,$

4. $\bigwedge_y \bigvee_{xz} x < y \wedge y < z,$

5. $\bigwedge_{xz} \bigvee_y x < z \rightarrow x < y \wedge y < z.$