Sztuka wygrywania cz. III

Dr Tadeusz B. IWIŃSKI

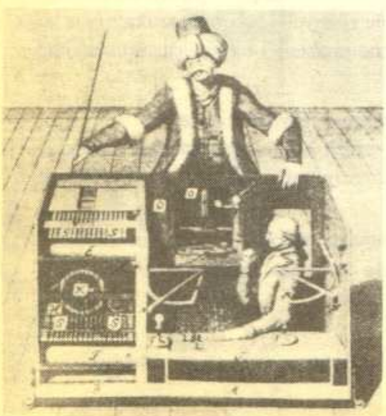
Zasady jednej z odmian gry zwanej grą Morra są następujące: każdy z dwu graczy chowa w dłoni 1 lub 2 zapałki, po czym obaj jednocześnie pokazują to, co mają. Jeśli suma zapałek jest parzysta, to wygrywa gracz pierwszy, jeśli nieparzysta — drugi. Wygrana wynosi tyle punktów, ile jest zapałek łącznie. Wyobraźmy sobie, że rozgrywamy tę grę jako gracz pierwszy. Macierz jej — z naszego punktu widzenia — podana jest obok. Każdy z graczy ma dwie strategie: „pokazać jedną zapałkę" oraz „pokazać dwie zapałki". Nasuwają się dwa pytania: Czy można sformułować jakieś zasady rozsądnego jej rozgrywania? Czy gra jest uczciwa, czy nie jest przypadkiem tak, że jej reguły stawiają jednego z graczy w uprzywilejowanej sytuacji?

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Przeciwnik} \\ & & \begin{array}{cc} 1z & 2z \end{array} \\ \text{My} & \begin{array}{c} 1z \\ 2z \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Po jednorazowym przeprowadzeniu tej gry nie da się odpowiedzieć na postawione wyżej pytania. Gra nie posiada pary strategii czystych w równowadze («Delta», nr 2); w pojedynczej grze musimy się liczyć z możliwością przegranej 3, a przeciwnik przegranej 2. Przeciwko zastosowaniu którejkolwiek z możliwych strategii przemawia to, że przeciwnik (którego uważamy za równie jak my rozsądnego) może się domyślić, co my myślimy, i odpowiednio do tego zastosować korzystną dla siebie strategię. Przeciwnik jest zresztą w dokładnie takiej samej sytuacji.

Gry tego rodzaju stają się ciekawe dopiero przy wielokrotnym ich rozgrywaniu. A w takim przypadku można, jak się okaże za chwilę, odpowiedzieć na oba pytania: istnieje metoda racjonalnego rozgrywania; przy tym faworyzuje ona przeciwnika i mamy prawo żądać od niego, by za każde 12 rozegranych gier wypłacał nam jeden punkt „ekstra". Dopiero taka dodatkowa umowa daje jednakowe szanse obu stronom. Przy tym odpowiedź na drugie pytanie wynika prosto z odpowiedzi na pytanie pierwsze, którym więc zajmiemy się przede wszystkim.

Jest rzeczą oczywistą, że przy wielokrotnym rozgrywaniu gry żadnemu z graczy nie opłaca się stosować ciągle tej samej strategii — przeciwnik zorientuje się dość szybko i będzie w stanie odpowiedzieć w sposób zapewniający mu wygraną. Należy więc zmieniać, **mieszać** strategie. Nie można jednak tego czynić w sposób systematyczny, przeciwnik bowiem może zorientować się w naszym systemie i, dostosowując swoje wybory do tego systemu, zapewnić sobie wygrane w każdej grze. Pozostaje więc zmieniać strategie w sposób przypadkowy (będziemy mówili: **losowy**). W celu uchronienia się przed jakąkolwiek systematycznością (z której możemy sobie nawet nie zdawać sprawy, ale którą przeciwnik byłby w stanie wykryć) moglibyśmy na przykład posłużyć się rzutem monetą lub kostką do gry, uzależniając wybór strategii od wyniku rzutu.



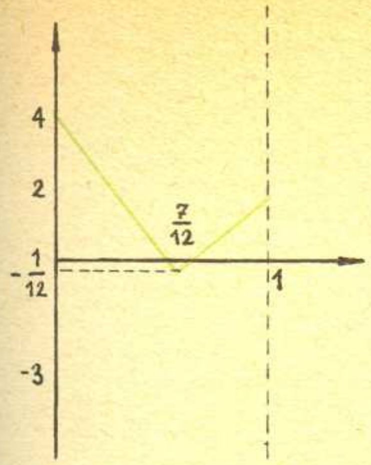
Przypuśćmy na chwilę, że przed każdą rozgrywką rzucamy monetę i stosujemy strategię 1, jeśli wypadnie reszka, a strategię 2, jeśli — orzeł. Wiadomo z doświadczenia, że przy dużej liczbie rzutów „porządną" monetą otrzymuje się mniej więcej połowę orłów i połowę reszek. Uzależnienie wyboru strategii od wyniku rzutu spowoduje więc, że w przybliżeniu w połowie przypadków (tzn. z częstością $\frac{1}{2}$) zastosujemy strategię 1, a w połowie (czyli też z częstością $\frac{1}{2}$) — strategię 2. Wynika stąd, że gdyby przeciwnik stale stosował swą strategię 1, to przy dużej ilości gier zdobywalibyśmy średnio z jednej gry połowę tego, co daje nam nasza strategia pierwsza, i połowę tego, co daje nam nasza strategia druga, a więc:

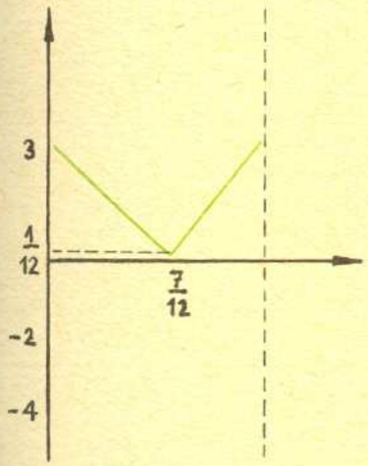
$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{1}{2}$$

punktu (przegrywalibyśmy ilość punktów równą mniej więcej połowie ilości gier). Gdyby natomiast przeciwnik stosował stale strategię 2, to średnio wygrywalibyśmy

$$\frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$

punktu (a więc w dostatecznie długich rozgrywkach moglibyśmy oczekiwać wygranej równej mniej więcej połowie ilości gier).





Jednakże przeciwnik nie będzie stale stosował jednej strategii. Gdyby również i on posługiwał się monetą, to można by oczekiwać, że każdy z czterech możliwych wyników pojedynczej gry pojawiałby się w długiej kolejce gier mniej więcej jednakowo często, a więc z częstością $\frac{1}{4}$. Nasza średnia wygrana z jednej gry wynosiłaby więc

$$\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot(-3)+\frac{1}{4}\cdot(-3)+\frac{1}{4}\cdot 4=0.$$

Omawianą tu metodę rozgrywania, polegającą na losowym mieszaniu strategii w stosunku 1:1, nazywa się strategią „mieszaną" $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Można oczywiście stosować i inne strategie mieszane. Gdyby na przykład posłużyć się kostką do gry i stosować strategię 1 jedynie w tym przypadku, gdy wypadnie szóstka, to postępowanie takie spowodowałoby mieszanie strategii w stosunku 1:5, a więc zastosowanie strategii $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$. I tak dalej.

Powstaje problem: jakie są najkorzystniejsze strategie mieszane dla każdego z graczy? Nie trudno zauważyć, że możemy się tu posłużyć tymi samymi metodami rachunkowymi, co przy rozwiązywaniu problemu Działkowicza («Delta» nr 4, zob. też zadania 1 i 2). Odpowiednie rachunki wykazują, że każdy z graczy powinien mieszać swe strategie w stosunku 7:5, a więc stosować strategię mieszaną $\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$. Dzięki takiemu postępowaniu gracz pierwszy, czyli my, nie przegra średnio więcej niż 1 punkt na 12 gier. Nasz przeciwnik natomiast, stosując swoją strategię mieszaną, zapewni sobie przy najlepszej nawet grze z naszej strony wygraną średnio 1 punktu na tę samą ilość gier. (Obok podajemy rysunki ilustrujące te rozwiązania, a Czytelnika zachęcamy do przeprowadzenia rachunków).

Rozstrzygnęliśmy więc oba postawione na początku problemy: każdy z graczy ma metodę rozsądnego rozgrywania tej gry — jest nią strategia mieszana $\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$. Gra stawia gracza 1 w gorszej sytuacji, przynosząc mu średnio „wygraną" $-\frac{1}{12}$ punktu na 1 grę.

Znaleziona para strategii mieszanych nazywa się „rozwiązaniem gry", a otrzymana średnia wygrana — „wartością gry".
Można udowodnić, że każda gra $m\times n$ posiada co najmniej jedno rozwiązanie.

Zadania i propozycje

1. Jak przy pomocy monety i kostki do gry można mieszać strategie w stosunku 7:5?
Propozycja: sprawdzić w praktyce zalecenia teorii. Dla zaoszczędzenia czasu w trakcie samej gry można przygotować sobie ściągaczkę, tj. wykonać zawczasu ciąg odpowiednich doświadczeń, wyniki zanotować na kartce i grać z kartki.

2. W trakcie rozgrywek zauważyliśmy, że przeciwnik stosuje (zapewne sam o tym nie wiedząc) mieszankę $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
Jak powinniśmy grać przeciw niemu?

3. Rozwiązać podane niżej gry (tzn. znaleźć strategie optymalne i wartości tych gier):

$$\text{a)}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad \text{b)}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad \text{c)}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}.$$

Propozycja: zastanowić się nad racjonalną metodą gry z przeciwnikiem, który nie zna tej teorii i dobiera strategie zupełnie przypadkowo, mieszając je w różnych okresach gry z różnymi częstościami. Autor oczekuje listów z propozycjami (na adres Redakcji).
Rozwiązania na stronie 15

Rozwiązanie zadań F6. cz. II

Zjawiska z różnych dziedzin fizyki mają ten sam opis matematyczny: $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$ (uwaga na znak (−)).
Równanie powyższe opisuje ruch harmoniczny. Rozwiązanie ogólne takiego równania jest postaci: $x=A\cos(\omega t+\varphi)$, gdzie A i φ są dwiema stałymi, odpowiednio zwanymi amplitudą i fazą początkową ruchu. Wyznacza się je z warunków początkowych, to jest znajomości położenia i prędkości obiektu w chwili $t=0$ (wyznaczanie tych wielkości jest niepotrzebne w naszym przypadku).

Oczywiście okres drgań wynosi $T=\frac{2\pi}{\omega}$.

Łatwo znajdziemy odpowiedzi na postawione pytania:

1. $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
2. $T_{spadku}=1/2\,T=\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}$
3. $l=\frac{T^2g}{2\pi^2}$
4. $L=\frac{T^4}{4\pi^2C}$