Semestr logiczny — jak to było, co to było?

Doc. dr hab. Wiktor MAREK

Od stycznia do czerwca 1973 roku odbył się w Międzynarodowym Centrum Matematycznym im. Stefana Banacha w Warszawie Semestr Poświęcony Podstawom Matematyki. Pod tą wspaniałą nazwą rozumie się zazwyczaj logikę i teorię mnogości, a ponieważ obie te dziedziny są w Polsce silnie reprezentowane (szereg ważnych pojęć i twierdzeń z tego zakresu powstało właśnie w Polsce), więc liczni matematycy z całego świata chętnie nasz kraj odwiedzają, by dyskutować nowe, powstałe w trakcie badań, problemy. Nic dziwnego zatem, że taka wyjątkowa okazja, jak cały semestr spotkań i wykładów, zgromadziła aż 82 uczonych z 22 krajów, nie licząc 47 matematyków polskich. Warszawa stała się na pół roku największym ośrodkiem badawczym w dziedzinie podstaw matematyki na świecie.

Przez pięć dni w tygodniu odbywały się w pałacyku przy ulicy Mokotowskiej różnorodne zajęcia. Soboty poświęcono na kontakty indywidualne i wykłady tych z gości, którzy przybyli do Warszawy tylko na krótko. Niedziele miały być wypełnione różnego typu rozrywkami. Ale właściwie przez cały czas trwania semestru, od rana do nocy, toczyły się nieustające dyskusje i spory. I dały one bogaty plon: w czasie semestru powstało dwadzieścia pięć prac naukowych, a co najmniej dwanaście zapoczątkowano. Jest to często wynik wspólnych badań matematyków z różnych krajów. Oczywiście pokazaliśmy naszym gościom Warszawę, nawiązaliśmy i zacieśniliśmy stosunki towarzyskie, ale pisząc o Semestrze niewątpliwie należy skoncentrować się na tym, co w nim było najważniejsze — na matematyce.

Czym właściwie zajmują się owe podstawy matematyki?

Głównym przedmiotem zainteresowania uprawiających tę dyscyplinę są: teorie (a więc zbiory zdań sformalizowanych języków) i modele (struktury, o których zdania te orzekają); drugi ważny nurt badań to problemy efektywności, trzeci wreszcie stanowi problematyka logik nieklasycznych (różnych od nauczanej w szkole).

O wszystkim tym była mowa w czasie Semestru. Moim zdaniem na czoło wysunęły się dwa tematy:

— uogólnienia teorii rekursji,

— języki uogólnione.

Pokrótce postaram się wyjaśnić, o co tu chodzi.

Pierwsze z wymienionych zagadnień związane jest z analizą pojęcia efektywności. Funkcję $f: N^k \to N$ nazywamy obliczalną (albo rekurencyjną), jeśli jest ona złożeniem skończonej ilości funkcji najprostszych. Przez najprostsze rozumie się następujące trzy rodzaje funkcji:

wszystkie funkcje postaci

$$g(k, l, \ldots, m) = n \quad \text{(funkcja stała)},$$

$$I(k, l, \ldots, m) = k \quad \text{(funkcja identycznościowa)},$$

$$S(k) = k+1 \quad \text{(następnik)}.$$

Również za obliczalną uznamy funkcję uzyskaną z wymienionych przez utożsamienie zmiennych oraz dwa schematy:

(a) **rekursja prosta**: jeśli f jest obliczalna, to obliczalną jest także funkcja h, określona przez warunki

$$h(0, a) = 0,$$

$$h(n+1, a) = f(n, h(n, a), a);$$

(b) **minimum efektywne**: jeśli f jest obliczalna i spełnia warunek

$$\bigwedge_x \bigvee_y f(x, y) = 0,$$

to obliczalną jest także funkcja h, określona następująco:

$$h(x) = \text{najmniejsze takie } y \text{, że } f(x, y) = 0.$$

Można to sobie wyobrazić tak: funkcja f jest obliczalna, gdy istnieje „recepta" R (w istocie algorytm) o takiej własności, że jeśli z liczbą n postąpimy według „recepty" R, wówczas jako rezultat otrzymamy liczbę $f(n)$. Obliczalnymi funkcjami są na przykład: dodawanie, mnożenie czy „sito Eratostenesa". Rozważania na temat funkcji obliczalnych mają istotne znaczenie dla matematyki — choćby słynne

„Sito Eratostenesa" — metoda uzyskiwania liczb pierwszych: W zbiorze liczb naturalnych większych od 1, uporządkowanych rosnąco, powtarzamy następującą operację: pierwszą z nie zaznaczonych liczb (na początku wszystkie są nie zaznaczone) bierzemy w kółko i skreślamy wszystkie jej wielokrotności. Liczby w kółkach to liczby pierwsze.

twierdzenie Gödla (patrz np: E. NAGEL i J. R. NEWMAN, *Twierdzenie Gödla*, «Omega», 52, 1966) o niepełności arytmetyki sformalizowanej, uzyskane tą drogą.
Jak to pojęcie uogólniamy? Na przykład rozpatrując funkcje **obliczalne względem danej funkcji** h. Umawiamy się mianowicie, że do grona funkcji obliczalnych dołączamy również h. Jej kombinacje z poprzednio wymienionymi funkcjami mogą istotnie rozszerzyć klasę funkcji obliczalnych. Intuicja może tu być na przykład taka: mamy „czarną skrzynkę" o takiej własności, że jeśli „wrzucimy" do niej liczbę n, to „wyleci" z niej liczba $h(n)$; możność dokonywania obliczeń (być może) istotnie się powiększy. (Zauważmy, że ilość funkcji obliczalnych jest przeliczalna, stąd też względna obliczalność może prowadzić do istotnego powiększenia rozważanej klasy funkcji).
A dalsze uogólnienia? Widać trzy kierunki:
I — stosowanie bardziej skomplikowanych „czarnych skrzynek";
II — rozważanie funkcji o dziedzinach innych niż N;
III — „mieszanie" I i II.
O tym właśnie mówiono w czasie Semestru (i to wiele).
Co jest „modne" w kierunku I? Zasadniczo tak zwane rekursje w obiektach wyższego typu. Co to znaczy? Umówmy się, że liczby naturalne są obiektami typu 0. Obiektem typu $n+1$ nazywamy funkcję o dziedzinie złożonej z obiektów typu n, a zbiorze wartości z obiektów typu 0. Niech A będzie „czarną skrzynką" i niech będzie obiektem typu 7. Liczenie przy jej pomocy — to właśnie rekursja w obiekcie typu 7. Co mianowicie otrzymamy dopuszczając ten typ rekursji? To nie jest pytanie, ale cały worek pytań.
Kierunek II. Przykładem może być tutaj rekursja na tak zwanych liczbach porządkowych dopuszczalnych. Nie zagłębiając się w definicję dopuszczalności przedstawmy ideę. Zbiór uporządkowany liniowo nazwiemy dobrze uporządkowanym, gdy każdy jego niepusty podzbiór posiada element pierwszy (porównaj artykuły A. MOSTOWSKIEGO w numerach 2 i 3 «Delty»). Liczby porządkowe reprezentują zbiory dobrze uporządkowane. Na niektórych (tu owa wspomniana dopuszczalność) można uprawiać teorię rekursji. Co się okazało? Otóż podobnie jak zwykła teoria rekursji okazała się odpowiednikiem rachunku kwantyfikatorów (klasycznej logiki), tak teoria rekursji na liczbach porządkowych odpowiada logice z wyrażeniami nieskończenie długimi. I tu problematyka rekursji doprowadza nas do problematyki języków uogólnionych.
Klasyczna logika operuje wyrażeniami uzyskanymi z tak zwanych atomowych (czyli najprostszych) przez branie koniunkcji, alternatyw, negacji oraz stosowanie kwantyfikatorów, a więc „przedimków" postaci:
istnieje takie x, że ...
bądź:
dla każdego x ... .
Można to uogólniać na przykład tak:
(1) branie nieskończonych koniunkcji i alternatyw,
(2) używanie „nowych" kwantyfikatorów,
(3) rozszerzanie języka o tak zwane zmienne drugiego rzędu.
Zajmijmy się możliwością (1). Zauważmy, że nie jest to w gruncie rzeczy nic nowego. Ot, choćby znane ze szkoły zdanie „Na każdej prostej znajduje się nieskończenie wiele punktów". Można to napisać jako:

$$(*) \qquad \bigwedge_{l} (B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \ldots),$$

gdzie B_n to wyrażenie mówiące: „istnieje co najmniej n punktów na prostej l", czyli

$$\bigvee_{P_1, P_2, \ldots, P_n} (P_1 \neq P_2 \wedge P_1 \neq P_3 \wedge \ldots \wedge P_{n-1} \neq P_n \wedge P_1 \in l \wedge \ldots \wedge P_n \in l).$$

Każde ze zdań B_n to zdanie języka geometrii. Zdanie (*) nie jest natomiast równoważne żadnemu takiemu zdaniu (oczywiście zapisanemu z zachowaniem reguł klasycznej logiki). Ale skoro chcemy go używać — musimy się nim zainteresować. To właśnie jest tematyka (1).
Stąd tylko krok do (2). Zdanie (*) dałoby się sformułować prosto, gdybyśmy dysponowali nowym kwantyfikatorem:
„istnieje nieskończenie wiele takich x, że ..."
(symbolicznie: $\underset{x}{\mathrm{Q}}$). Moglibyśmy wówczas zdanie (*) zapisać:

$$\bigwedge_{l} \underset{P}{\mathrm{Q}} (P \in l),$$

tyle że to już nie byłby klasyczny rachunek kwantyfikatorów. Cóż jednak w tym złego? Przyjmując pragmatyczną zasadę, że „nic, czego matematyk używa, nie jest

Rozwiązanie zadania M18.
Oznaczmy przez S_{12}, S_{13} i S_{23} wyrażone w dcm^2 pola powierzchni zakrytych przez pierwszy i drugi, pierwszy i trzeci oraz drugi i trzeci kawałek papieru. Zachodzi nierówność

$$(1) \qquad 90 \geqslant 3 \cdot 40 - (S_{12} + S_{13} + S_{23})$$

pole powierzchni całego stołu jest co najmniej równe polu powierzchni zakrytej, a to ostatnie jest co najmniej równe $3 \cdot 40 + -(S_{12} + S_{13} + S_{23})$, gdyż pola powierzchni zakrytych dwukrotnie były w iloczynie $3 \cdot 40$ policzone co najmniej dwukrotnie (pole powierzchni zakrytej trzykrotnie było liczone trzykrotnie). Oznaczmy przez S największą spośród liczb S_{12}, S_{13}, S_{23}.
Z nierówności (1) mamy

$$3S \geqslant S_{12} + S_{13} + S_{23} \geqslant 30,$$

skąd $S \geqslant 10$. Istnieją więc dwa kawałki papieru, które pokrywają dwukrotnie powierzchnię co najmniej 10 dcm^2, a więc razem pokrywają one powierzchnię najwyżej $(2 \cdot 40 - 10)$ dcm^2.

obce logikowi", musimy oczywiście badać i takie kwantyfikatory jak Q. Uogólnienie (3) polega na dopuszczeniu (jako wyrażenia poprawnego) kwantyfikatora zbiorów. Na przykład zasada indukcji sformułowana jest przy takim „uogólnieniu" (czyli języku drugiego rzędu) w następujący sposób:

$$(^{**}) \qquad \bigwedge_{Z} (0 \in Z \wedge \bigwedge_{x} (x \in Z \Rightarrow (x+1) \in Z) \Rightarrow \bigwedge_{x} x \in Z).$$

Mówimy tu o zbiorach liczb, a nie tylko o samych liczbach. Nie jest to więc wyrażenie arytmetyki sformalizowanej w rachunku kwantyfikatorów. Taka „drobna" zmiana w arytmetyce, jak dopuszczenie kwantyfikatorów wiążących zbiory liczb, czyni z niej teorię kategoryczną, a więc posiadającą dokładnie jeden model (podczas gdy bez używania takich chwytów osiągnąć kategoryczności arytmetyki nie można).
Po omówieniu — pobieżnym siłą rzeczy — spróbujmy uchwycić cechę wspólną wszystkich trzech rozważanych uogólnień języka rachunku kwantyfikatorów. Otóż tym wspólnym elementem jest dążenie do zwiększania środków wyrazu dostępnych w codziennej matematyce.

Tyle krótkiego sprawozdania z Semestru. O problemach, tu zaznaczonych zaledwie, zapisano kilogramy papieru, a znalazłoby się w różnych miejscach świata kilku ludzi, którzy żyją z tłumaczenia innym, co i jak trzeba uogólniać. Niemniej może udało mi się przekazać Czytelnikowi, co w tych dziedzinach się dzieje?

Zadania

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M16. W rozgrywkach piłkarskich, w których każda drużyna grała z każdą jeden raz, trzy drużyny, które zajęły pierwsze trzy miejsca, zdobyły odpowiednio 7, 5 i 3 punkty (za wygraną otrzymuje drużyna 2 punkty, za remis 1, za przegraną 0). Ile drużyn uczestniczyło w turnieju i po ile punktów zdobyły pozostałe drużyny?
Rozwiązanie na str. 16

M17. Określamy ciąg a_n wzorem $a_n = n^4+4^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Które wyrazy tego ciągu są liczbami pierwszymi?
Rozwiązanie na str. 9

M18. Na stole o powierzchni 90 dcm^2 położono 3 kawałki papieru o powierzchni 40 dcm^2 każdy (żaden kawałek papieru nie wystaje poza krawędź stołu). Udowodnić, że pewne dwa z tych kawałków pokrywają razem powierzchnię stołu o polu nie przekraczającym 70 dcm^2.
Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Andrzej ZIEMIŃSKI

Gorący okres! Dosłownie, a dla wielu Czytelników również w przenośni. Okres egzaminów maturalnych, wstępnych. Za tych, co zdają, trzymamy kciuki i chociaż powinno to zasadniczo wystarczyć, proponujemy jeszcze rozwiązanie kilku pozornie różnych zadań. Poszukajmy w nich cech wspólnych — pomoże to nam rozwiązywać analogiczne problemy na sali egzaminacyjnej.

F6.

I. Obliczyć okres wahań ciężarka o masie m, zawieszonego na sprężynie o stałej k.

II. Obliczyć czas przelotu ciała o masie m przez tunel w poprzek Ziemi, przechodzący przez jej środek. Uproszczenia: zaniedbujemy opór powietrza, zakładamy kulistość i jednorodność kuli ziemskiej.

III. W rurce o kształcie litery U, o stałym przekroju, znajduje się ciecz. Ciecz wyprowadzona z równowagi waha się przelewając się z jednego ramienia do drugiego. Okres wahań wynosi T. Obliczyć długość słupa cieczy.
Uproszczenia: Zaniedbujemy lepkość cieczy.

IV. Obliczyć indukcję L cewki w układzie generatora LC, jeżeli znany jest okres drgań T i pojemność C kondensatora.
Rozwiązanie na str. 15