Liczba pierwsza a nierozkładalna

Dr Maciej BRYŃSKI

Co nowego można dodać o rozkładzie na czynniki? Przecież wszyscy tak dobrze wiedzą, o co chodzi, przecież już dzieci z powszechniaka wiedzą, że $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, a pięć się nie rozkłada. A może jednak warto chwilę się nad tym zastanowić, przypomnieć, co i na co rozkładamy.

Wszystkie działania i związki, które tu przypomnimy, dotyczą liczb całkowitych. Stwierdziliśmy przed chwilą, że pięć się nie rozkłada, a przecież $5 = 1 \cdot 5 = (-1) \cdot (-5)$. Musimy więc te rozkłady uznać za nieistotne. Łatwo wyjaśnimy, dlaczego. Każdą liczbę całkowitą n można zapisać w postaci $n = 1 \cdot n$, przy czym jedynka występująca w iloczynie nic nie znaczy, można ją pominąć. Trochę inaczej jest z liczbą -1, ale ponieważ $(-1) \cdot (-1) = 1$, więc $n = (-1) \cdot (-n) = (-1) \cdot (-1) \cdot n$, a zatem znów -1 niewiele znaczy w tym iloczynie, bo czynnik n pozostaje nie zmieniony. A więc tak naprawdę nie chodzi nam o dosłowną, absolutną nierozkładalność liczby 5; przez nierozkładalność liczby 5 rozumiemy to, że w każdym przedstawieniu 5 w postaci iloczynu liczb całkowitych musi wystąpić czynnik 5 lub -5. Liczby wyróżnione przez podobną własność nazywamy liczbami nierozkładalnymi lub pierwszymi. Dokładniej: liczbę całkowitą n różną od $0, 1, -1$ nazywamy liczbą pierwszą,

(1) jeśli jedynymi jej dzielnikami są liczby $1, -1, n, -n$.

Warunek ten można również sformułować następująco:

(2) jeśli liczba n dzieli iloczyn liczb całkowitych $k \cdot l$, to n dzieli k lub n dzieli l.

(Czytelnik z pewnością udowodni równoważność tych warunków.) Dobrze znane twierdzenie z arytmetyki liczb całkowitych głosi, że każdą liczbę całkowitą można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych, przy czym rozkład taki jest jednoznaczny z dokładnością do znaków poszczególnych czynników oraz ich porządku. Inaczej mówiąc: każde dwa rozkłady tej samej liczby całkowitej na iloczyn liczb pierwszych mogą co najwyżej różnić się porządkiem czynników oraz znakami poszczególnych czynników. Jest rzeczą jasną, że takie różnice są nieistotne, a z drugiej strony niemożliwe do uniknięcia, mnożenie liczb całkowitych jest bowiem przemienne, więc porządek czynników w każdym iloczynie jest dowolny, a $k \cdot l = (-k) \cdot (-l)$ dla dowolnych czynników k, l całkowitych. Ostatni argument pozwala zwrócić uwagę na szczególną rolę liczb 1 i -1 w zbiorze liczb całkowitych. Zauważmy, że są to jedyne liczby n spełniające w zbiorze liczb całkowitych warunek

(3) dla n istnieje m, takie że $n \cdot m = 1$.

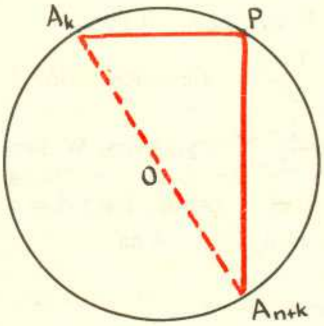
Elementy spełniające w pewnym zbiorze liczbowym warunek (3) nazywamy elementami odwracalnymi. Spróbujmy zbadać omawiane wyżej pojęcia w innych zbiorach liczbowych. Ograniczymy się tylko do takich zbiorów, w których dla każdych dwóch elementów istnieje ich suma, różnica i iloczyn. Jednym z takich zbiorów jest zbiór liczb wymiernych. Każda różna od zera liczba wymierna $\frac{p}{q}$ jest elementem odwracalnym: $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$, a każdą liczbę wymierną można podzielić przez każdą różną od zera liczbę wymierną. Z tego powodu warunki (1) oraz (2) trywializują się i dalsze próby rozwijania teorii jednoznaczności rozkładu nie doprowadzą do ciekawych wyników.

Rozpatrzmy teraz zbiór liczb postaci $a + b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi. W tym zbiorze oprócz liczb 1 i -1 istnieją jeszcze inne elementy odwracalne, mianowicie $(1+\sqrt{2}) \cdot (-1+\sqrt{2}) = 1$. Ponieważ dla każdego naturalnego wykładnika n $(1+\sqrt{2})^n \cdot (-1+\sqrt{2})^n = 1$, więc liczby $1, -1, \pm(1+\sqrt{2})^n, \pm(-1+\sqrt{2})^n$ są elementami odwracalnymi. Można udowodnić, że w rozpatrywanym przez nas zbiorze liczb nie ma innych elementów odwracalnych. Wobec tego problem jednoznaczności rozkładu nie może tu być tak prosty, jak dla liczb całkowitych.

Rozwiązanie zadania **M 14.**
Mamy

$$A_1P^2+A_2P^2+\ldots+A_{2n}P^2 = (A_1P^2+A_{n+1}P^2)+\ldots+(A_nP^2+A_{2n}P^2) = n\cdot d^2,$$

gdzie d jest średnicą okręgu opisanego na wielokącie. (Wykorzystaliśmy tu fakt, że kąt A_kPA_{n+k} jest prosty jako wpisany oparty na średnicy, i zastosowaliśmy twierdzenie Pitagorasa).



Czytelnik zechce się zastanowić, czego wystarczy żądać od wielokąta zamiast jego foremności, by podany dowód był nadal poprawny.
Czy twierdzenie podane w zadaniu pozostanie prawdziwe, gdy będziemy rozpatrywać wielokąty foremne o nieparzystej liczbie boków? Jak będzie dla trójkąta foremnego?

Należy najpierw ustalić pojęcie elementu nierozkładalnego. Oczywiście każdy element odwracalny jest dzielnikiem dowolnego elementu: jeśli $\varepsilon\cdot\eta = 1$, to $x = \varepsilon\cdot(\eta x)$.
Podobnie, jeśli y jest dzielnikiem x, ε jest elementem odwracalnym, to $\varepsilon\cdot y$ też jest dzielnikiem x: przypuśćmy, że $x = y\cdot d$, $\varepsilon\cdot\eta = 1$, wtedy $x = (\varepsilon\cdot y)\cdot(\eta\cdot d)$.
Wobec tego odpowiednikiem warunku (1) będzie:
(N) Element nieodwracalny x jest elementem nierozkładalnym, jeśli jedynymi jego dzielnikami są elementy odwracalne oraz wszystkie iloczyny $\varepsilon\cdot x$, gdzie ε jest dowolnym elementem odwracalnym.
Przypomnijmy również warunek (2), za pomocą którego charakteryzowaliśmy liczby pierwsze:
(P) Element nieodwracalny x jest elementem pierwszym, jeśli z faktu, że x dzieli iloczyn $y\cdot z$ dwóch elementów z rozpatrywanego zbioru liczb, wynika, że x dzieli któryś z czynników tego iloczynu.
Okazuje się, że nie w każdym zbiorze liczb warunki te są równoważne. Każdy element pierwszy jest elementem nierozkładalnym, ale (jak wskażemy dalej na przykładzie) element może być nierozkładalny, ale nie musi być pierwszy.
Problem jednoznaczności rozkładu możemy sformułować następująco:
Niech P będzie takim zbiorem liczb, że dla każdych elementów $a, b\in P$ suma $a+b$, różnica $a-b$ i iloczyn $a\cdot b$ należą do P. Powiemy, że w P ma miejsce jednoznaczność rozkładu, jeśli:
(I) Każdy element nieodwracalny jest iloczynem elementów nierozkładalnych.
(II) Jeśli w pewnym rozkładzie elementu $a\in P$ na iloczyn elementów nierozkładalnych występuje czynnik p, to w każdym innym rozkładzie a występuje czynnik $\varepsilon\cdot p$, gdzie ε jest elementem odwracalnym.
Okazuje się, że w zbiorze liczb $a+b\sqrt{2}$ (a, b — całkowite) obowiązuje jednoznaczność rozkładu w sensie powyższego określenia. Dowodu tego faktu nie będziemy tu przytaczać.
Zupełnie inna sytuacja jest w zbiorze liczb $a+b\sqrt{5}$ (a, b — całkowite). W zbiorze tym mamy oczywiście

$$4 = 2\cdot 2 = (1+\sqrt{5})\cdot(-1+\sqrt{5}).$$

Stwierdzimy, że elementy 2, $1+\sqrt{5}$, $-1+\sqrt{5}$ są nierozkładalne w naszym zbiorze oraz 2 nie jest iloczynem elementu $1+\sqrt{5}$ ani $-1+\sqrt{5}$ przez element odwracalny. Otrzymamy w ten sposób dwa istotnie różne (w świetle wymagań definicji rozkładu jednoznacznego) rozkłady liczby 4.
W tym celu przyporządkujmy każdej liczbie $a+b\sqrt{5}$ liczbę $\mathrm{N}(a+b\sqrt{5}) = (a+b\sqrt{5})\cdot(a-b\sqrt{5}) = a^2-5b^2$, zwaną normą liczby $a+b\sqrt{5}$. Wprost z określenia normy wynika, że
a) $\mathrm{N}(a+b\sqrt{5})$ jest liczbą całkowitą,
b) $\mathrm{N}[(a+b\sqrt{5})\cdot(c+d\sqrt{5})] = \mathrm{N}(a+b\sqrt{5})\cdot\mathrm{N}(c+d\sqrt{5})$.
Zauważmy, że norma elementu odwracalnego równa się 1 lub -1, bo jeśli $(a+b\sqrt{5})\cdot(c+d\sqrt{5}) = 1$, to $1 = \mathrm{N}(1) = \mathrm{N}(a+b\sqrt{5})\cdot\mathrm{N}(c+d\sqrt{5})$, a iloczyn dwóch liczb całkowitych $\mathrm{N}(a+b\sqrt{5})$ i $\mathrm{N}(c+d\sqrt{5})$ może być równy 1 tylko wtedy, gdy każda z nich równa jest 1 lub -1.
Z drugiej strony, jeśli $\mathrm{N}(a+b\sqrt{5}) = \pm 1$, to $a+b\sqrt{5}$ jest elementem odwracalnym, bo $(a+b\sqrt{5})\cdot(a-b\sqrt{5}) = \pm 1$.
Pokażemy, że 2 jest elementem nierozkładalnym .
Gdyby $2 = (a+b\sqrt{5})\cdot(c+d\sqrt{5})$, przy czym żaden z czynników tego iloczynu nie był elementem odwracalnym, to $4 = \mathrm{N}(2) = \mathrm{N}(a+b\sqrt{5})\cdot\mathrm{N}(c+d\sqrt{5})$, przy czym żadna z liczb całkowitych $\mathrm{N}(a+b\sqrt{5})$, $\mathrm{N}(c+d\sqrt{5})$ nie równa się 1 ani -1. Zatem $\mathrm{N}(a+b\sqrt{5}) = 2$ lub -2. Mamy więc

$$a^2-5b^2 = 2 \quad\text{lub}\quad a^2-5b^2 = -2,$$

czyli

$$a^2 = 2+5b^2 \quad\text{lub}\quad a^2 = -2+5b^2.$$

W zależności od parzystości liczby b, ostatnią cyfrą w rozwinięciu dziesiętnym liczby $2+5b^2$ jest 7 lub 2, zaś liczby $-2+5b^2$ jest 8 lub 3. Liczba $2+5b^2$ lub $-2+5b^2$ musiałaby być kwadratem liczby całkowitej a, tymczasem 2, 3, 7 ani 8 nie są ostatnimi cyframi kwadratu żadnej liczby całkowitej. Do tej sprzeczności doszliśmy przypuszczając, że 2 jest elementem rozkładalnym w naszym zbiorze liczb. Rozumowanie uzasadniające nierozkładalność liczb $1+\sqrt{5}$, $-1+\sqrt{5}$ byłoby identyczne, gdyż norma każdej z nich wynosi -4.

Istotnie więc $2\cdot 2 = (1+\sqrt{5})\cdot(-1+\sqrt{5})$ są dwoma rozkładami liczby 4 na iloczyn czynników nierozkładalnych.

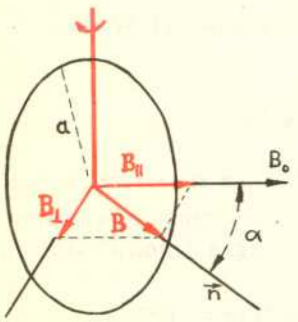
Przypuśćmy, że $1+\sqrt{5} = 2\cdot(a+b\sqrt{5})$, gdzie $a+b\sqrt{5}$ jest elementem odwracalnym. Mielibyśmy $1+\sqrt{5} = 2a+2b\sqrt{5}$; $1-2a = (2b-1)\sqrt{5}$. Ponieważ b jest liczbą całkowitą, więc $2b-1 \neq 0$. Otrzymalibyśmy więc $\sqrt{5} = \dfrac{1-2a}{2b-1}$, ale ta równość nie może mieć miejsca, bo $\sqrt{5}$ jest liczbą niewymierną, a $\dfrac{1-2a}{2b-1}$ wymierną. Wobec tego nie istnieje element odwracalny $a+b\sqrt{5}$, który spełniałby równość $1+\sqrt{5} = 2(a+b\sqrt{5})$, a to dowodzi, że rozważane przez nas rozkłady liczby 4 na czynniki nierozkładalne są istotnie różne; w zbiorze liczb $\{a+b\sqrt{5}: a, b$ — całkowite$\}$ nie ma więc jednoznaczności rozkładu. Możemy teraz podać zapowiedziany przykład elementu nierozkładalnego, który nie jest pierwszy: jak wynika z przeprowadzonego rozumowania, liczba 2 jest w rozpatrywanym zbiorze elementem nierozkładalnym oraz dzieli iloczyn liczb $(1+\sqrt{5})\cdot(-1+\sqrt{5})$, natomiast nie dzieli żadnego czynnika tego iloczynu.

Rozwiązanie zadania F5

Na początku, dla uproszczenia, zaniedbajmy zjawisko samoindukcji. W wirującym pierścieniu wystąpi siła elektromotoryczna indukcji $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

gdzie Φ oznacza strumień ziemskiego pola magnetycznego przenikającego w danej chwili pierścień, a t oznacza czas. Zgodnie z rysunkiem:



$$\Phi = B_0\cdot \pi a^2\cdot\cos\alpha = \pi\cdot a^2 B_0 \cos(\omega t+\alpha_0),$$

gdzie B_0 jest wartością poziomej składowej indukcji ziemskiego pola magnetycznego, zaś a promieniem okręgu. Kąt α_0 jest to wartość kąta α w chwili początkowej — i przyjmiemy dalej jego wartość za równą 0.

W pierścieniu będzie płynął prąd o natężeniu I:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{SaB_0\omega}{2\varrho}\sin\omega t,$$

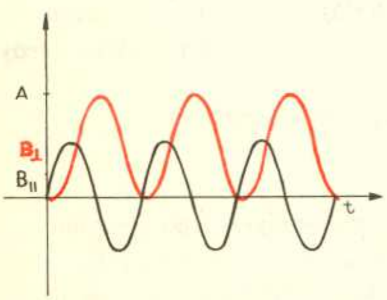
gdzie R oznacza opór omowy aluminium, a ϱ jego opór właściwy. Prąd ten wywoła dodatkowe pole magnetyczne, w każdej chwili prostopadłe do płaszczyzny pierścienia, o wartości w środku pierścienia:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\varrho}.$$

Wektor **B** można rozłożyć na dwie składowe:
$\mathbf{B}_{||}$ — wzdłuż kierunku $\mathbf{B}_0$ i $\mathbf{B}_{\perp}$ — w kierunku prostopadłym do $\mathbf{B}_0$. Ich wartości wynoszą odpowiednio:

$$\mathbf{B}_{||} = \frac{\mu_0 SB_0\omega}{8\varrho}\sin 2\omega t = \frac{A}{2}\sin 2\omega t,$$

$$\mathbf{B}_{\perp} = \frac{\mu_0 SB_0\omega}{4\varrho}\sin^2\omega t = A\sin^2\omega t, \quad \text{gdzie} \quad A = \frac{\mu_0 SB_0\omega}{4\varrho}.$$



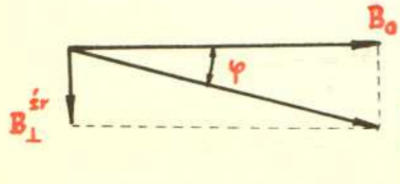
Na wykresie obok pokazana została zależność $\mathbf{B}_{||}$ i $\mathbf{B}_{\perp}$ od czasu. $\mathbf{B}_{||}$ okresowo zmienia znak, natomiast $\mathbf{B}_{\perp}$ jest zawsze nieujemne. Igła kompasu, jeżeli ω jest duże, reaguje tylko na wypadkowe pole magnetyczne uśrednione w pewnym dużym przedziale czasu. Średnie wartości $\mathbf{B}_{||}$ i $\mathbf{B}_{\perp}$ wynoszą:

$$\mathbf{B}_{||}^{\text{śr}} = 0; \mathbf{B}_{\perp}^{\text{śr}} = \frac{A}{2}$$

(patrz zagadnienie napięcia i natężenia skutecznego, *Fizyka dla III kl.*, str. 72).

Wypadkowe pole magnetyczne tworzy z poziomą składową ziemskiego pola magnetycznego kąt φ:

$$(\ast)\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\mu_0 S\omega}{8\varrho}.$$



Uwaga: Wynik nie zależy od promienia a pierścienia. Dla oceny wartości φ przyjmijmy wartości:

$$S = 10\ mm^2; \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7}\frac{N}{A^2} \quad \varrho = 2\cdot 8\cdot 10^{-8}\Omega m; \quad \omega = 2\pi\cdot 50 s^{-1}.$$

Otrzymany wynik można porównać z odpowiedzią na str. 3.

A jak zachowałaby się igła, gdybyśmy zwiększali wartość ω i nie można by było zaniedbać zjawiska samoindukcji? Dyskusja tej sytuacji znajduje się na str. 3.