Sztuka wygrywania

dr Tadeusz B. IWIŃSKI

Działkowicz **D** uprawia swą działkę nie tylko dla samej przyjemności obcowania z przyrodą. Liczy on również na pewne dochody ze sprzedaży tego, co ziemia mu urodzi. Postanowił obsadzić działkę tulipanami lub truskawkami. Wie on (mniejsza o to, skąd), że jeśli wiosenne pogody sprzyjają obfitości truskawek, to tulipany wyrastają marnie; jeśli natomiast tulipany rozwijają się nad podziw pięknie, to truskawki zupełnie się nie udają. Ani we wróżby, ani w prognozy meteorologiczne **D** nie wierzy, nie jest więc w stanie przewidzieć, jakie będą wiosenne pogody. Wyliczył sobie, że jeśli wiosna okaże się truskawkowa, to na truskawkach zarobi na czysto 3 tys. złotych, natomiast ze sprzedaży tulipanów uzyska zaledwie zwrot kosztów własnych. Gdyby jednak wiosna miała charakter tulipanowy, to na truskawkach straci około 1 tys. zł, a tulipany przyniosłyby mu 2 tys. zł zysku.

Działkowicz **D** ma więc do rozegrania grę, w której przeciwnikiem jego jest natura **N**. Działkowicz może zastosować jedną z dwu strategii: posadzić truskawki (**t**) lub posadzić tulipany (**tu**). Wierzy on również w to, że Natura zastosuje jedną z dwu swoich strategii: pogodę truskawkową (**T**) lub pogodę tulipanową (**TU**). Macierz tej gry (z punktu widzenia gracza **D**) podana jest obok; liczby w niej występujące oznaczają zysk gracza **D** w tysiącach złotych.

Działkowicz

Natura

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \mathrm{T} & \mathrm{TU} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{tu} \\ \mathrm{t} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Gracz **D** nie jest ryzykantem. Nad nadzieję ewentualnego dużego zysku przedkłada on zarobek pewny, choć mały. Powinien więc zastosować swą strategię minimaksową*, w tym przypadku strategię **t**. Jest to rzeczywiście strategia ostrożna, ale nie jest zadowalająca: gwarantuje mu ona tylko to, że nic nie straci. Gdyby przynajmniej Natura była przeciwnikiem rozsądnym, to musiałaby się liczyć z tym, że może przegrać nawet 2 (strategią minimaksową **N** jest **TU**) i, być może, dałoby się coś od niej wytargować. Ale Natura przegranych nie liczy i zachowuje się jak gracz, który co prawda przystępuje do gry, ale wcale nie interesuje się jej wynikiem. Czy mimo to nie można w tej grze uzyskać nic ponad gwarancję zwrotu kosztów własnych?

* Por. «Delta» nr 2.

Można. Działkowicza nic nie zmusza do wyboru jednej z czystych strategii: **t** lub **tu**. Może on, choć nie brał tego początkowo pod uwagę, zastosować strategię mieszaną: część działki obsadzić tulipanami, a resztę truskawkami. Jeśli na przykład dokładnie połowę przeznaczy pod tulipany, a drugą pod truskawki (powiemy, że zastosował strategię (1/2, 1/2)), to przy pogodzie **T** łączny zysk z obu upraw wyniesie $\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}$, a więc 1500 zł, natomiast przy pogodzie **TU** Działkowicz zarobi 500 zł, bo $\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(-1)=\frac{1}{2}$. Zatem strategia (1/2, 1/2) jest bezpieczniejsza niż strategia czysta **tu**. Powstaje jednak nowy problem: czy jest to strategia najkorzystniejsza, a jeśli nie, to jak znaleźć strategię mieszaną, która gwarantuje zysk możliwie największy?

Strategię mieszaną Działkowicza, polegającą na przeznaczeniu części x obszaru działki pod tulipany i części $1-x$ pod truskawki, oznaczymy symbolem $(x, 1-x)$. Oczywiście $0 \leqslant x \leqslant 1$. Z oczywistych względów symbol (1, 0) oznacza strategię czystą **tu** („wszystko pod tulipany"), a symbol (0, 1) — strategię czystą **t** („wszystko pod truskawki"). Jeśli **N** zastosuje strategię **T**, to **D** może przy zastosowaniu swej strategii $(x, 1-x)$ oczekiwać zysku

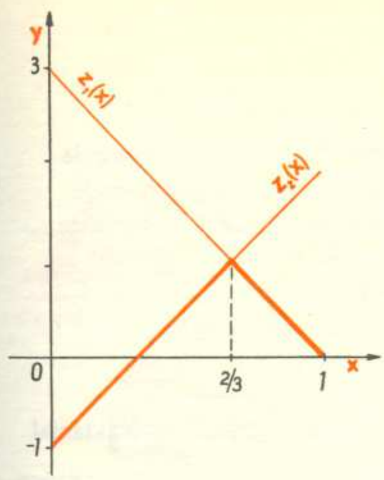
$$z_1(x) = x\cdot 0+(1-x)\cdot 3 = 3-3x,$$

natomiast przy strategii **TU** oczekiwany zysk wynosi

$$z_2(x) = x\cdot 2+(1-x)\cdot(-1) = 3x-1.$$

Zatem **D** może w tej sytuacji oczekiwać na pewno takiego zysku, który jest mniejszą z liczb $z_1(x)$, $z_2(x)$ (lub każdą z nich, jeśli obie są równe). Rozwiązanie problemu Działkowicza sprowadza się do znalezienia takiego x_0, przy którym ta gwarantowana wartość zysku jest możliwie największa.

Rozwiązanie zadania M10.
Zauważmy, że liczba $2N$ kończy się cyfrą 0, wobec czego N równa się 0 lub 5. Gdyby $N=5$, to z ostatniej (piątej) kolumny „mielibyśmy w pamięci" 1 i $1+T+2E = 10a+T$, skąd $1 = 2(5a-E)$, co jest niemożliwe. Musi więc być $N=0$, wobec tego $E=5$. Jakaś cyfra musiała być „zapamiętana" przy przejściu od kolumny drugiej do pierwszej; była to jedynka, gdyż suma w kolumnie drugiej jest równa 10 lub 11. Tak więc I równa się 0 lub 1, ale N jest zerem, więc $I=1$ i $O=9$. Z dodawania kolumny trzeciej „zapamiętaliśmy" więc liczbę 2. Wobec tego, że z kolumny przedostatniej zostało nam „w pamięci" 1, to $1+R+2T = 20+X$, ale $X \geqslant 2$, $R \leqslant 8$ (cyfry 0, 1, 9 są już „zajęte"), więc $1+8+2T \geqslant 1+R+2T = 20+X \geqslant 20+2$, $2T \geqslant 13$, T równa się 7 lub 8. Gdyby T równało się 7, to R równałoby się 8 (bo jeżeli $R \leqslant 7$, to $R \leqslant 6$ i $1+R+2T \leqslant 1+6+2\cdot 7 = 21 < 22$) oraz X równałoby się 3. Jest to niemożliwe, gdyż nie zostałaby żadna para kolejnych cyfr, którymi muszą być F i S. Mamy więc: $T=8$, $1+R+2\cdot 8 = 20+X$, $3+X=R$, a ponieważ musi zostać para kolejnych cyfr dla F i S, więc $X=4$ i $R=7$; wtedy oczywiście $F=2$, $S=3$ i pozostaje $Y=6$.
Było więc $29\,786+850+850 = 31\,486$.



Rozwiązujemy (por. rysunek obok). Jeśli zysk $z_1(x)$ ma być nie większy od $z_2(x)$:

$$z_1(x) = 3-3x \leqslant 3x-1 = z_2(x),$$

to musi być spełniony warunek $x \geqslant 2/3$, i na odwrót. Innymi słowy, dla $2/3 \leqslant x \leqslant 1$ gwarantowany zysk wynosi $z_1(x) = 3-3x$. Ponieważ zaś funkcja liniowa $3-3x$ jest malejąca, to największa wartość osiąga ona w lewym końcu tego przedziału: dla $x = 2/3$. Analogicznie stwierdzamy, że dla pozostałych x $(0 \leqslant x \leqslant 2/3)$ gwarantowany zysk wynosi $z_2(x) = 3x-1$, przy czym jest on największy na prawym końcu tego przedziału: dla $x = 2/3$. Przy tym $z_1(2/3) = z_2(2/3) = 1$. Zatem rozwiązaniem naszego zagadnienia jest $x_0 = 2/3$, co odpowiada strategii $(2/3, 1/3)$.

Istnieje zatem najlepsza strategia Działkowicza w jego grze przeciw Naturze. Jest nią strategia mieszana polegająca na obsadzeniu 2/3 działki tulipanami, a 1/3 działki truskawkami. Przy zastosowaniu tej strategii osiągnie on na pewno zysk wynoszący co najmniej 1 tys. zł — niezależnie od kaprysów aury.

Dla Czytelnika, któremu botaniczna fabuła rozwiązywanego tu zagadnienia wydała się nudna, a działkowicz — dusigroszem bez polotu, dodatkowa informacja: „Działkowicz" jest kryptonimem dowódcy organizującego obronę na pewnym odcinku frontu, „Natura" jest sztabem przeciwnika, strategia **T** to po prostu zmasowany atak bronią pancerną, a strategia **TU** — potężne uderzenie z powietrza. Interpretacja strategii **t** i **tu** jest już łatwa do odszyfrowania. Czym są tulipany i truskawki?

Działkowicz

$$\text{Natura}\quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \mathbf{tu} & \mathbf{t} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{T} \\ \mathbf{TU} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

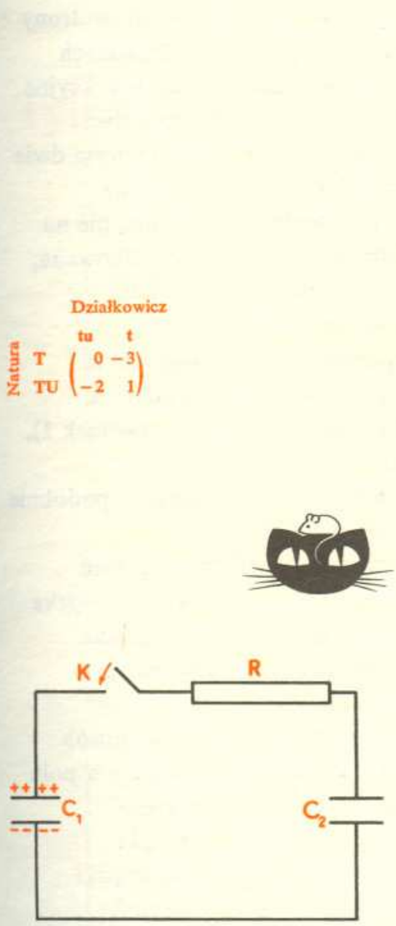
Zadania

1. Spójrzmy na rozważaną powyżej grę okiem gracza **N**. Macierz gry oglądanej z tej pozycji podana jest obok. Załóżmy teraz, że gracz **N** może stosować strategie mieszane (założenie takie jest sensowne przy batalistycznej interpretacji gry), a gracz **D** może stosować tylko strategie czyste. Udowodnić, że gracz **N** może sobie zapewnić to, że nie przegra więcej niż 1. Podać strategię optymalną gracza **N**, wykonać wykres ilustrujący rozwiązanie.
Rozwiązanie na str. 13.

2. Załóżmy, że w rozważanej grze obaj gracze mogą stosować strategie mieszane. Udowodnić, że jeśli **D** stosuje swą optymalną strategię mieszaną, to przy żadnej strategii mieszanej przeciwnika nie otrzyma on mniej, niż to, co gwarantuje mu strategia optymalna przeciwko strategiom czystym. Wykazać, że tę samą własność ma strategia optymalna gracza **N**.
Rozwiązanie na str. 7.

Zadania

Redaguje dr Jędrzej JĘDRZEJEWSKI



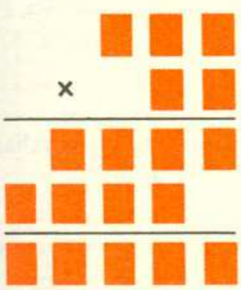
F4. Naładowany kondensator o pojemności C_1 połączono poprzez opornik z drugim, nie naładowanym, o pojemności C_2 według schematu. Po zamknięciu klucza K połowa energii naładowanego kondensatora wydzieliła się na oporniku w postaci ciepła. Zakładamy, że indukcyjność elementów obwodu można pominąć. Oblicz wartość oporu R oraz powiedz, czy kondensatory są takiej samej, czy też różnej barwy (obydwa pochodzą z tej samej serii produkcyjnej).
Rozwiązanie na str. 16.

Redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M10. W poniższym dodawaniu różne litery oznaczają różne cyfry

$$\begin{array}{r} FORTY \\ TEN \\ +\ TEN \\ \hline SIXTY \end{array}$$

Jaka litera oznacza jaką cyfrę?
(Po angielsku: *forty* = 40, *ten* = 10, *sixty* = 60. Zachęcamy Czytelników do układania i nadsyłania podobnych zadań, w których wystąpią polskie wyrazy, układające się w sensowne zwroty; rozwiązanie powinno być jednoznaczne).
Rozwiązanie na str. 4.



M11. W mnożeniu obok występowały tylko cyfry 2, 3, 5, 7.
Odtworzyć zapis tego mnożenia.
Rozwiązanie na str. 13.

M12. Udowodnić, że na płaszczyźnie istnieje sześć punktów o tej własności, że każdy trójkąt o wierzchołkach leżących w pewnych spośród tych punktów jest równoramienny.
Rozwiązanie na str. 15.