Urojony sprzymierzeniec

Dr Maciej SKWARCZYŃSKI

Wszyscy wiemy, że w zbiorze liczb rzeczywistych są wykonalne wszystkie cztery działania arytmetyczne. Niestety już prosty przykład

(1) $$x^2+1=0$$

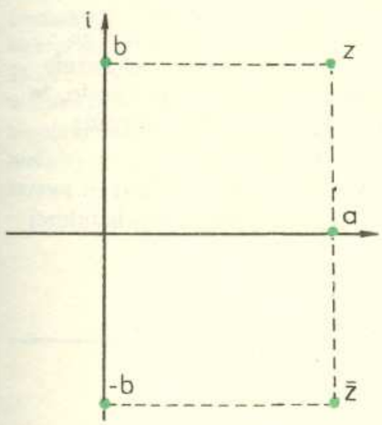
pokazuje, że równanie o współczynnikach rzeczywistych może nie mieć rzeczywistego pierwiastka. Nieprzyjemna sytuacja. Nie jest w końcu miło być posądzonym o nieumiejętność rozwiązania tak prosto wyglądającego równania. Nic więc dziwnego, że już w szesnastym wieku matematycy wprowadzili do rozważań nowy idealny obiekt, oznaczany symbolem i, uważany za rozwiązanie równania (1).

Przy wykonywaniu działań arytmetycznych postępowano z nim tak, jak ze znanymi liczbami, pamiętając jedynie że $i^2 = -1$. W wyniku otrzymywano liczby postaci $a+bi$, gdzie a, $b \in R$, zwane zespolonymi, oraz wzory

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i,$$
$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Liczby postaci bi nazywano urojonymi, gdyż mimo wszystko istnienie liczb, których kwadrat byłby liczbą ujemną, nadal budziło wątpliwości.

Musiały minąć trzy stulecia, zanim Karol Gauss rozproszył te wątpliwości, interpretując liczbę zespoloną $z = a+bi$ jako punkt na płaszczyźnie o współrzędnych a, b. Odcięta a nazywa się częścią rzeczywistą, a rzędna b nazywa się częścią urojoną liczby z. Stąd też zbiór liczb zespolonych został nazwany płaszczyzną Gaussa.



Liczba $\bar{z}$, symetryczna do z względem osi rzeczywistej, nazywa się sprzężoną do z. Oczywiście $\bar{z} = a-bi$. Ciekawą własnością sprzężenia jest to, że wynik działania arytmetycznego na liczbach sprzężonych z z_1, z_2 jest zawsze liczbą sprzężoną do wyniku tego działania na liczbach z_1, z_2. Jeśli z_0 jest pierwiastkiem równania o rzeczywistych współczynnikach

(2) $$a_nz^n+\ldots+a_0 = 0,$$

to biorąc sprzężenie obu stron widzimy, że $\bar{z}_0$ jest również pierwiastkiem tego równania.

Odległość liczby z od zera na płaszczyźnie Gaussa jest oznaczana przez $|z|$ i nazywa się wartością bezwzględną liczby z. Oczywiście

$$|z|^2 = a^2+b^2, \quad \text{a więc} \quad |z|^2 = z\bar{z}.$$

Równość $|z_1||z_2| = |z_1z_2|$ wynika łatwo z drugiego z tych związków, jeśli ją zapisać w równoważnej postaci

$$|z_1|^2|z_2|^2 = |z_1z_2|^2.$$

Uwzględniając powyższy związek, otrzymujemy tożsamość, w której występują już tylko liczby rzeczywiste:

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) = (a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2.$$

Oto do czego przydała się urojona liczba i. Otrzymaliśmy elegancki dowód twierdzenia o liczbach jak najbardziej naturalnych: iloczyn dwu liczb naturalnych, będących sumami kwadratów liczb naturalnych, jest liczbą, która jest również sumą kwadratów liczb naturalnych.

Zobaczmy, w czym jeszcze może pomóc urojony sprzymierzeniec.

Zauważmy najpierw, że pojęcie granicy ciągu może być rozszerzone na przypadek, gdy wyrazy ciągu są liczbami zespolonymi. Liczba zespolona z nazywa się granicą ciągu $\{z_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, jeżeli ciąg, którego n-tym wyrazem jest odległość z_n od z na płaszczyźnie Gaussa, dąży do zera przy n dążącym do nieskończoności. Podobnie jak w przypadku rzeczywistym, definiujemy sumę szeregu o wyrazach z_n jako granicę ciągu sum częściowych

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(z_0+z_1+\ldots+z_n).$$

Jeśli granica ta istnieje, to mówimy, że szereg jest zbieżny.
Funkcje trygonometryczne $\sin x$, $\cos x$ mogą być przedstawione szeregiem potęgowym o wyrazach rzeczywistych, zbieżnym dla każdego $x \in R$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Własność tę ma również funkcja wykładnicza. Jeśli za podstawę przyjąć liczbę rzeczywistą

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots \approx 2{,}73,$$

to dla każdego $x \in R$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Można udowodnić, że każdy z tych szeregów pozostaje zbieżny, gdy zamiast x podstawi się dowolną liczbę zespoloną z. W szczególności

$$e^{it} = 1+\frac{it}{1!}+\frac{i^2t^2}{2!}+\frac{i^3t^3}{3!}+\ldots = 1+\frac{it}{1!}-\frac{t^2}{2!}-\frac{it^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{it^5}{5!}-\ldots =$$

$$= \left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}-\ldots\right).$$

Otrzymaliśmy wzór Eulera:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Tak więc między funkcją wykładniczą a funkcjami trygonometrycznymi zachodzi niezmiernie ciekawy związek. Jest to tym bardziej nieoczekiwane, że funkcja wykładnicza była definiowana w programie algebry zupełnie niezależnie od funkcji trygonometrycznych. Dopiero wprowadzenie urojonego i pokazało, że funkcja wykładnicza może być pożyteczna w zadaniach, w których występują funkcje trygonometryczne, i na odwrót.

Spróbujmy na przykład wyrazić funkcje $\cos nt$, $\sin nt$ w zależności od funkcji $\cos t$, $\sin t$. Naszym punktem wyjścia będzie podstawowa dla funkcji wykładniczej tożsamość

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

która, tak jak w przypadku rzeczywistym, wynika z przedstawienia oraz własności szeregów.

Z tożsamości tej wynika natychmiast wzór $e^{nz} = (e^z)^n$.
W szczególności

$$e^{int} = (e^{it})^n.$$

Stąd również wobec wzoru Eulera otrzymujemy wzór de Moivre'a

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt.$$

Stosując do lewej strony wzór Newtona i porównując części rzeczywiste i urojone obu stron otrzymujemy tożsamości

$$\cos nt = \cos^n t - \binom{n}{2}\cos^{n-2} t \cdot \sin^2 t + \binom{n}{4}\cos^{n-4} t \cdot \sin^4 t - \ldots,$$

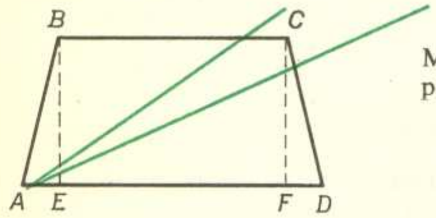
$$\sin nt = \binom{n}{1}\cos^{n-1} t \cdot \sin t - \binom{n}{3}\cos^{n-3} t \cdot \sin^3 t + \ldots.$$

Na przykład dla $n = 4$ mamy:

$$\cos 4t = \cos^4 t - 6\cos^2 t \sin^2 t + \sin^4 t = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1$$

$$\sin 4t = 4\cos^3 t \cdot \sin t - 4\cos t \cdot \sin^3 t.$$

W tożsamościach tych nie występują liczby zespolone.
Urojony sprzymierzeniec po spełnieniu swej roli zniknął, pozostawiając gotowy wynik.



Rozwiązanie zadania M8
Z warunków zadania mamy (zob. rysunek) $AD = 8$ cm, $BC = 4$ cm. Niech BE i CF będą wysokościami trapezu. Ze wzoru na pole trapezu znajdujemy $BE = 3{,}5$ cm. Trójkąty ABE i DCF są przystające, więc $AE = FD$, i ponieważ $AE + FD = AD - BC = 4$ cm, więc $AE = 2$ cm. Wówczas $AB =$

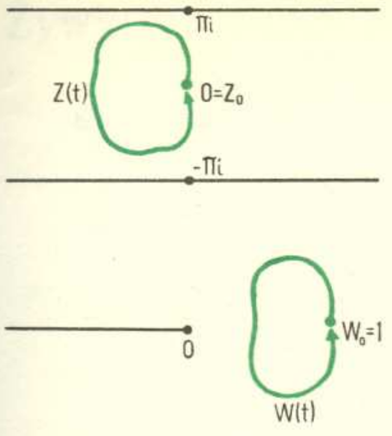
$= \sqrt{AE^2+BE^2} =$

$= \sqrt{2^2+3{,}5^2}$ cm $= \frac{\sqrt{65}}{2}$ cm.

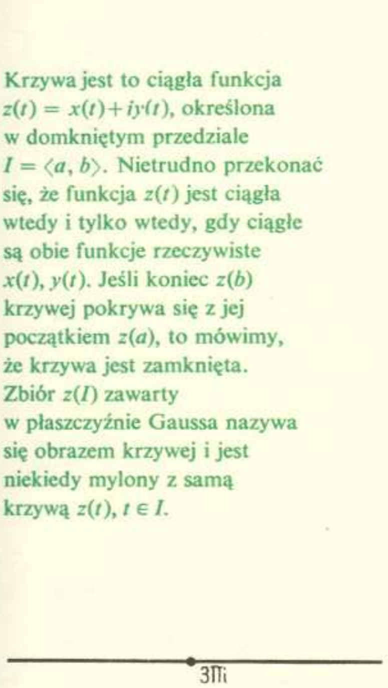
Musimy teraz rozstrzygnąć, które z położeń, zaznaczonych na rysunku liniami przerywanymi zajmuje dwusieczna kąta BAD. W tym celu zbadajmy, który z kątów BAC i CAD jest większy. Ponieważ kąty CAD i BCA są równe, mamy porównać kąty BAC i BCA. Są to kąty trójkąta ABC, a w trójkącie naprzeciwko większego kąta leży dłuższy bok. Mamy więc porównać boki BC i AB. Mają one długości 4 cm i $\frac{\sqrt{65}}{2}$ cm.

Mamy oczywiście $4 < \frac{1}{2}\sqrt{65}$,

skąd $BC < AB$ i kąt BAC jest mniejszy od kąta BCA, a więc kąt BAC jest mniejszy od kąta CAD; dwusieczna kąta BAD przecina więc bok CD.



Krzywa jest to ciągła funkcja $z(t) = x(t)+iy(t)$, określona w domkniętym przedziale $I = \langle a, b\rangle$. Nietrudno przekonać się, że funkcja $z(t)$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy ciągłe są obie funkcje rzeczywiste $x(t)$, $y(t)$. Jeśli koniec $z(b)$ krzywej pokrywa się z jej początkiem $z(a)$, to mówimy, że krzywa jest zamknięta. Zbiór $z(I)$ zawarty w płaszczyźnie Gaussa nazywa się obrazem krzywej i jest niekiedy mylony z samą krzywą $z(t)$, $t \in I$.



Z kolei spróbujmy obliczyć sumę:

$$C_n = 1+\cos t+\cos 2t+ \ldots +\cos nt.$$

Zadanie wydaje się trudne ..., ale od czego liczba i? Liczby zespolone:

$$1, \cos t+i\sin t,\ \cos 2t+i\sin 2t,\ \ldots,\ \cos nt+i\sin nt$$

tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = \cos t+i\sin t$. Istotnie, zgodnie ze wzorem de Moivre'a, mamy

$$(\cos kt+i\sin kt)(\cos t+i\sin t) = e^{ikt}\cdot e^{it} = e^{i(k+1)t} = \cos(k+1)t+i\sin(k+1)t.$$

Oznaczając

$$S_n = \sin t+\sin 2t+ \ldots +\sin nt$$

i korzystając ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego, otrzymujemy dla $q \neq 1$

$$C_n+iS_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{\sin\frac{n+1}{2}t\cdot\cos\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}} + i\,\frac{\sin\frac{n+1}{2}t\cdot\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone otrzymujemy szukany wzór na C_n oraz dodatkowo wzór na S_n. Tym razem nasz sprzymierzeniec nie tylko pomógł rozwiązać zadanie, ale jeszcze zostawił prezent. Zamiast jednego mamy dwa wzory:

$$1+\cos t+\cos 2t+ \ldots +\cos nt = \frac{\sin\frac{n+1}{2}t\cdot\cos\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}},$$

$$\sin t+\sin 2t+ \ldots +\sin nt = \frac{\sin\frac{n+1}{2}t\cdot\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}.$$

Przyjrzyjmy się teraz geometrycznym własnościom funkcji e^z. Zauważmy, że $2\pi i$ jest okresem tej funkcji. Rzeczywiście,

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi+i\sin 2\pi = 1+0i = 1, \quad \text{więc} \quad e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

Podzielmy płaszczyznę zmiennej $z = s+ti$ na pasy prostymi $t = 2k\pi$, gdzie $k = 0, \pm 1, \ldots$. Funkcja e^z przekształca pas $0 < t < 2\pi$ (i każdy z pozostałych pasów) wzajemnie jednoznacznie na płaszczyznę z usuniętą półprostą dodatnią $w \geqslant 0$.

W podobny sposób dzieląc płaszczyznę zmiennej $z = s+ti$ na pasy prostymi $t = \pi+2k\pi$, gdzie $k = 0, \pm 1, \ldots$, przekonujemy się, że funkcja e^z przekształca każdy z tych pasów wzajemnie jednoznacznie na płaszczyznę z usuniętą półprostą ujemną $w \leqslant 0$.

Tak więc obrazem płaszczyzny Gaussa przy przekształceniu $w = e^z$ jest płaszczyzna Gaussa z usuniętym punktem 0. W szczególności dla każdego $w_0 \neq 0$ istnieje liczba z_0 taka, że $e^{z_0} = w_0$. Co więcej, jeśli $w(t)$ jest krzywą o początku w punkcie w_0, nie przechodzącą przez 0, to istnieje dokładnie jedna krzywa $z(t)$ o początku w punkcie z_0 taka, że $e^{z(t)} = w(t)$ dla każdego t. Jeżeli krzywa $w(t)$ nie przecina półprostej dodatniej (lub półprostej ujemnej), to krzywa $z(t)$ cała zawiera się w tym pasie, do którego należy z_0, i jest zamknięta, jeżeli krzywa $w(t)$ jest zamknięta. Tak jest w przypadku przedstawionym na górnym rysunku. Na ogół jednak koniec krzywej $z(t)$ jest różny od z_0. Gdy np. $w(t) = r\cdot e^{it}$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, to $z(t) = z_0+it$, gdzie $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, nie jest krzywą zamkniętą.

Liczba z_0, taka, że $e^{z_0} = w_0$ nazywa się logarytmem liczby w_0. Część urojona t_0 liczby z_0 nazywa się argumentem liczby w_0. Stąd też różnica między końcem krzywej $z(t)$ a jej początkiem nazywa się przyrostem logarytmu na krzywej $w(t)$. Przyrost argumentu na krzywej $w(t)$ definiujemy jako część urojoną przyrostu logarytmu. W ostatnim przykładzie przyrost logarytmu wynosił $2\pi i$, a przyrost argumentu wynosił 2π. W przypadku ogólnym przyrost logarytmu jest równy $2k\pi i$, a przyrost argumentu jest równy $2k\pi$, gdzie k jest pewną liczbą całkowitą. Liczba k nie zależy od początku z_0 krzywej $z(t)$ (dlaczego?) i nazywa się indeksem ind $w(t)$ krzywej zamkniętej $w(t)$. Wskazuje ona, ile razy krzywa $w(t)$ „obiega" punkt 0.

Niech $w_1(t)$, $w_2(t)$ będą dwiema krzywymi zamkniętymi, którym odpowiadają krzywe $z_1(t)$ i $z_2(t)$. Równość

$$e^{z_1(t)+z_2(t)} = e^{z_1(t)}e^{z_2(t)} = w_1(t)w_2(t)$$

pokazuje, że krzywej $w_1(t)w_2(t)$ odpowiada krzywa $z_1(t)+z_2(t)$. Wynika stąd następna bardzo ważna własność indeksu:

$$\operatorname{ind}\big(w_1(t)w_2(t)\big) = \operatorname{ind} w_1(t) + \operatorname{ind} w_2(t).$$

Drugą własność indeksu zaobserwowaliśmy już wcześniej. Mianowicie, jeśli zamknięta krzywa $w(t)$ nie przecina półprostej dodatniej (lub ujemnej), to

$$\operatorname{ind} w(t) = 0.$$

Zobaczymy teraz, w jaki sposób z tych dwu własności indeksu wynika następujące

podstawowe twierdzenie algebry:

Każdy wielomian

(2) $$W(z) = a_n z^n + \ldots + a_0, \quad n > 0, \quad a_n \neq 0$$

o współczynnikach zespolonych posiada zespolony pierwiastek.

Będziemy rozumować nie wprost. Przypuśćmy, że wielomian W nie posiada pierwiastka. Wynika stąd, że krzywa $W(re^{it})$, gdzie $r \geqslant 0$, zaś $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, nie przechodzi przez 0, a więc posiada określony indeks. Indeks ten zmienia się w sposób ciągły wraz z r, a będąc zawsze liczbą całkowitą musi mieć tę samą wartość dla każdego r. Dla $r = 0$ krzywa $W(re^{it})$ redukuje się do stałej, a więc indeks ma wartość zero.

Tymczasem pisząc $W = W_1 W_2$, gdzie $W_1 = z^n$, $W_2 = a_n + \dfrac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \dfrac{a_0}{z^n}$ stwierdzamy, że dla dużych r indeks ma wartość n. Rzeczywiście, dla dużych wartości bezwzględnych zmiennej z, wartości W_2 mało różnią się od a_n i wobec tego nie należą do półprostej dodatniej lub nie należą do półprostej ujemnej. Stąd, dla dużych r, $\operatorname{ind} W_2(re^{it}) = 0$. Ale $\operatorname{ind} W_1(re^{it}) = n \operatorname{ind} re^{it} = n$. Zatem

$$\operatorname{ind} W(re^{it}) = n+0 = n.$$

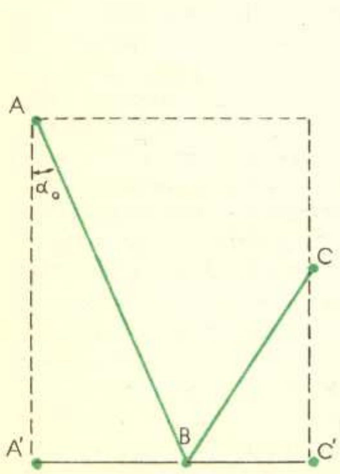
Otrzymaliśmy sprzeczność z warunkiem $n > 0$, a więc dowód został zakończony.

Raz jeszcze urojone i sprawiło niespodziankę, i to niespodziankę dużego kalibru. Powołane do istnienia wyłącznie w związku z kłopotami z rozwiązaniem prościutkiego równania (1), odwdzięczyło się w sposób przewyższający wszelkie oczekiwania. Równanie (2) może nie mieć pierwiastka rzeczywistego, ale na pewno posiada pierwiastek postaci $a+bi$. Przyznacie, że takiego sprzymierzeńca można nawet polubić. A może warto nawet ... poznać go trochę lepiej.

Zadania

redaguje dr Jędrzej JĘDRZEJEWSKI

F3. Do wykonania dziennych zadań pozostało listonoszowi doręczenie jednej przesyłki do któregoś z domów przy ulicy $A'C'$. Ulica ta biegnie wzdłuż placu, w którego narożniku (punkt A) znajduje się urząd wydający przesyłki. W punkcie C placu przy ulicy CC', biegnącej prostopadle do $A'C'$ i także wzdłuż tego samego placu, znajduje się urząd C, do którego listonosz musiał dostarczyć pokwitowanie odbioru przesyłki. Listonosz wybrał sobie adresata (punkt B) w taki sposób, żeby przebyć trasę ABC w najkrótszym czasie. Ciężar niesionej paczki obniża prędkość marszu listonosza n = trzykrotnie w stosunku do prędkości marszu z listem lub bez paczki. Czy przesyłką była paczka, czy list, jeżeli wiadomo, że kierunek wybranej przez niego drogi (odcinek AB) tworzy z ulicą $A'A$ kąt $\alpha_0 = 30°$? Zakładamy ponadto, że listonosz do i od adresata porusza się po prostych i ruchem jednostajnym.
Rozwiązanie na str. 13



redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

W niniejszym numerze podajemy trzy zadania, które mieli rozwiązać uczestnicy Zaocznej Szkoły Matematycznej przy Uniwersytecie Moskiewskim.

M7. Student w ciągu pięciu lat studiów zdał 31 egzaminów. Na każdym roku studiów zdawał więcej egzaminów niż na roku poprzednim. Liczba egzaminów na roku piątym była trzy razy większa od liczby egzaminów na roku pierwszym. Ile egzaminów zdawał student na roku czwartym?
Rozwiązanie na str. 14.

M8. Równoległe boki trapezu równoramiennego mają długości 4 cm i 8 cm, pole trapezu wynosi 21 cm^2. Który bok trapezu przecina dwusieczna kąta przy większej podstawie?
Rozwiązanie na str. 2.

M9. Czy suma odległości punktu leżącego wewnątrz czworokąta wypukłego od każdego jego wierzchołka może być większa od jego obwodu?
Rozwiązanie na str. 15.