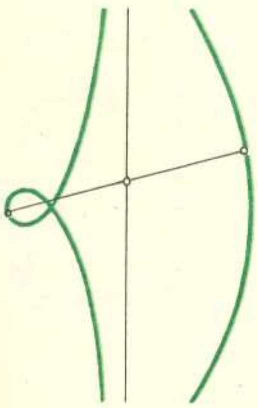
DOBRZE, A GDZIE TEN PTAK?

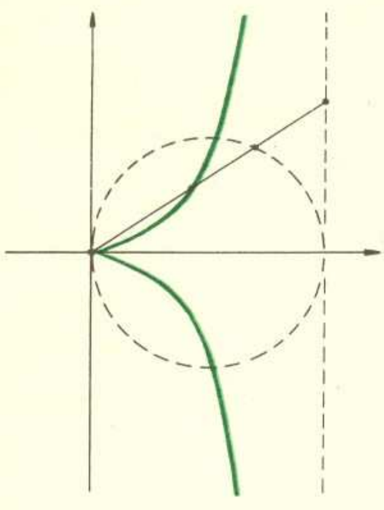
Tylko ci spośród Was, których zasób dobrej woli jest największy, dopatrzyli się ptaka w opisanym urządzeniu. Rzecz jasna, przedstawiłem Wam tylko pewien model fizyczny, rodzaj silnika, który możecie dowolnie „ubrać w piórka", nadając mu postać bardziej atrakcyjną czy maskującą jego zasadę działania. Przyślijcie opisy wykonanych przez Was ptaków ze zdjęciami. Najciekawsze opublikujemy.

Jak zlikwidować geometrię?

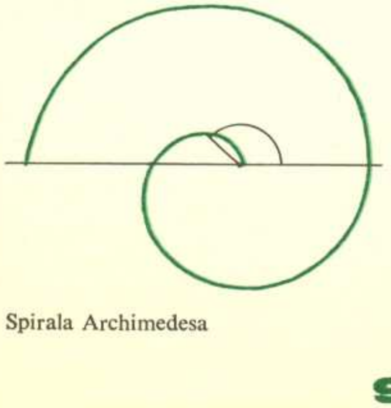
Dr Marek KORDOS



Konchoida Nikomedesa



Cissoida Dioklesa



Spirala Archimedesa

Wydaje się, że można prześladować jakąś dyscyplinę, pragnącą nosić miano nauki, z trzech zasadniczych powodów. Mianowicie, gdy ma przedmiot nieokreślony lub metody podejrzane bądź wreszcie wnioski mętne. Dlatego właśnie nie chcemy uznać za naukę chiromancji, czy też kabalistyki. Historia rodzaju ludzkiego dostarczyła również szeregu przykładów skrupulatnego i energicznego likwidowania tej bądź innej teorii z uwagi na płynące z niej wnioski, uznane przez likwidatorów za fatalne i szkodliwe. Dlatego na przykład starano się unicestwić prace Kopernika czy Darwina. Ostatni jednak z przytoczonych powodów nie cieszy się uznaniem i, co ważniejsze, nie daje na dłuższą metę rezultatów. Tylko, co to wszystko ma wspólnego z geometrią?

KAŻDA Z OSOBNA

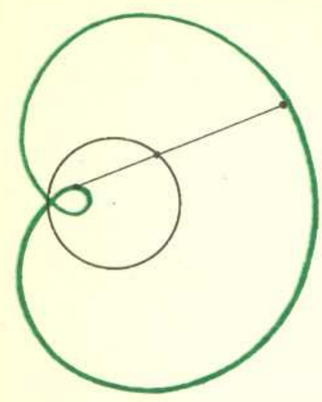
Tomasso Campanella, włoski dominikanin, wojujący zresztą z Inkwizycją, żyjący na przełomie XVI i XVII wieku, w swojej powieści utopijnej *Miasto słońca* pisze między innymi, że zbliżający się do tego idealnego miasta podróżnik może na jego murach dostrzec rysunki znacznie większej liczby figur geometrycznych od tej, jaką znają współcześni uczeni. Z dzisiejszego punktu widzenia zdanie takie jest absurdalne. Przecież figur geometrycznych jest nieskończenie wiele, a więc nie można ich wszystkich narysować. A cóż dopiero „znacznie więcej". Rzecz jednak w tym, że wówczas, w XVI wieku, zdanie to było sensowne. Wobec nieumiejętności objęcia figur geometrycznych jakąś wspólną teorią, a nawet zdefiniowania pojęcia „figura geometryczna", ówcześni geometrzy rozpatrywali każdą z nich z osobna. Figura geometryczna był to oddzielny obiekt, samodzielne indywiduum, pewien fenomen wymagający odrębnego badania. Figurę uważano za daną, jeżeli był znany sposób (ścisły) jej narysowania, metody jej metrycznego opisu (pole, obwód, itp.), słowem — jeżeli można się było nią praktycznie zajmować. Dla łatwiejszego porozumienia się nadawano bardziej skomplikowanym figurom imiona własne, np. konchoida Nikomedesa, cissoida Dioklesa, spirala Archimedesa, ślimak Pascala. A uczony-geometra był tym wybitniejszy, im więcej znał figur.

NO TO LIKWIDUJEMY!

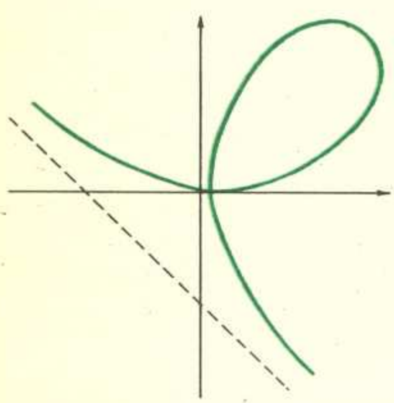
Błędem byłoby sądzić, że wśród nauk, na ich siedemnastowiecznym poziomie, geometria była wyjątkowo niechlujna metodologicznie. Wręcz przeciwnie, ciągle jeszcze każdy światły człowiek owych czasów uważał za swój punkt honoru mieć pewne wykształcenie i w tej dziedzinie. Z drugiej strony np. fizyka nie umiała jeszcze opisać ruchu ani kinematycznie, ani dynamicznie, medycyna nie dopracowała się pojęcia układu krwionośnego, chemicy nie rezygnowali z poszukiwań kamienia filozoficznego.

Natomiast dla wielu stało się jasne, że to co się nazywa nauką, w istocie słuszniej byłoby nazwać bałaganem. I dlatego to właśnie siedemnaste stulecie dało początek nowożytnej nauce, dlatego w tym stuleciu we wszystkich właściwie dyscyplinach dokonano, jak to się mówi, milowego kroku naprzód. Jedni precyzowali metodologię i tym samym dokonywali zasadniczych odkryć w konkretnych dyscyplinach wiedzy (np. Newton), inni śmiało „chwytali byka za rogi" zajmując się metodologią nauk w pełnej ogólności. Do tych ostatnich należał Francuz René Descartes, szerzej znany pod nazwiskiem Kartezjusza. Poglądy swoje wyłożył w *Rozprawie o metodzie*, proponując system zwany dziś racjonalizmem.

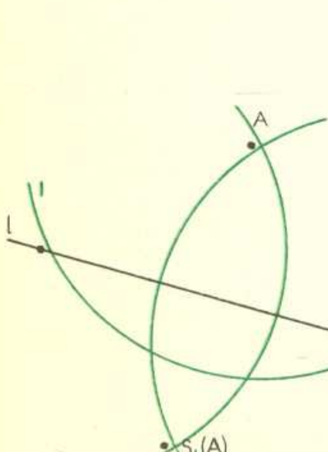
I tu właśnie dostało się geometrii. Poddając surowej krytyce metodologię większości dyscyplin naukowych uważał Kartezjusz za słuszne podać pozytywny przykład skuteczności proponowanych przez siebie zasad. Oczywiście w jednej dyscyplinie. Wybór padł na geometrię. Pomysł zaś metodologiczny polegał na



Ślimak Pascala



Liść Kartezjusza



wprowadzeniu układu współrzędnych, przyporządkowaniu za jego pomocą punktom trójek liczb — ich współrzędnych — i sprowadzeniu tym sposobem rozważań geometrycznych do algebry, do rachunku na liczbach — współrzędnych punktów. Geometria uprawiana dotychczasowymi metodami uznana została przez Kartezjusza za zbędną. Wykład nowych metod dołączył do *Rozprawy o metodzie* jako aneks, zatytułowany *Geometria analityczna*. Do dziś nazwa ta oznacza właśnie uprawianie geometrii metodami Kartezjusza, tj. sprowadzenie jej do roli działu algebry.

Nie wypada zresztą dziwić się radykalności sformułowań zawartych w *Rozprawie o metodzie* — każdy istotny przewrót niesie ze sobą krańcowe zaprzeczenie dotychczasowego stanu.

ANIA Z ZIELONEGO WZGÓRZA I INNI

Pomysł Kartezjusza okazał się niesłychanie płodny. Do operowania współrzędnymi punktów wprzęgnięto stworzoną w kilka(!) lat później analizę matematyczną (Newton i Leibniz), uzyskując gałąź matematyki zwaną geometrią różniczkową. Nowoczesna, dwudziestowieczna algebra dała w podobny sposób geometrię algebraiczną. Obie te dziedziny doprowadzono do wysokiej sprawności. Inna rzecz, że i ta „stara" geometria nie legła odłogiem. W czasach pokartezjańskich rozszerzyła nawet swoje królestwo, dołączając do „zwykłych" euklidesowych przestrzeni nieeuklidesową przestrzeń rzutową, przestrzeń Bolyai–Łobaczewskiego, całą rodzinę przestrzeni Riemanna. Dopracowała się solidnych logicznych podstaw (Hilbert) i ustaliła swoje związki z algebrą. Te ostatnie da się ująć krótko w stwierdzeniu, że zarówno pojęcia geometryczne można wymodelować w algebrze, jak i odwrotnie — pojęcia algebraiczne mogą być wymodelowane w geometrii.

A jednak... na wyższych uczelniach (na całym świecie) wykłada się obecnie w ramach standardowego kursu tylko geometrię analityczną i jej pochodne. Coraz silniej naciska się na takież ustawienie geometrii w liceach. Poważny autorytet proponował, by geometrii syntetycznej (przeciwieństwo analitycznej) uczyć „tak jak historii sztuki". Niemniej poważny autorytet zadał mi (zresztą publicznie) pytanie: „No dobrze, ale po co się tym zajmować, skoro algebra i tak wystarczy?" Dyskusję nad celowością uprawiania (i nauczania) geometrii znajdą Czytelnicy na łamach «Wiadomości Matematycznych».

Zmartwieni geometrzy (tym mianowicie, że wymrą) piszą reklamowe wręcz dzieła (np. *Wstęp do geometrii dawnej i nowej* Coxetera — świetna i ciekawa książka dwukrotnie już wydana przez PWN). Ale czy to pomoże? Wszak już Ania z Zielonego Wzgórza stwierdziła, że geometrii nauczyć się nie można. Żarty żartami, bardzo jednak jestem ciekaw, co na ten temat sądzą Czytelnicy «Delty».

Może w wyrobieniu opinii pomoże przykład problemu, który jest łatwiej rozstrzygnąć metodą syntetyczną niż analityczną, i przykład problemu, w którym zależność jest odwrotna.

I. Znaleźć punkt symetryczny do danego względem danej prostej. Metodami syntetycznymi robi się to przez trzy pociągnięcia cyrklem (patrz rysunek), i to stale o tej samej rozwartości. Metodę analityczną zechce Czytelnik sam wypróbować. Podam rozwiązanie: symetryczny do punktu (p, q) względem prostej o równaniu $ax+by+c = 0$ jest punkt

$$\left(\frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2}p - \frac{2ab}{a^2+b^2}q - \frac{2ac}{a^2+b^2}, \quad \frac{-2ab}{a^2+b^2}p + \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}q - \frac{2bc}{a^2+b^2}\right).$$

Przyjemnych rachunków!

II. Udowodnić, że złożenie (wykonanie po kolei) trzech symetrii środkowych jest symetrią środkową. Metoda syntetyczna jest długa i dość żmudna (patrz np. podręcznik dla I klasy liceum). Natomiast analitycznie: współrzędnymi punktu symetrycznego do (p, q) względem (a, b) są $(2a-p, 2b-q)$.

Zauważmy, że jeśli

$$(p_1, q_1) = (2a_1-p, 2b_1-q),$$
$$(p_2, q_2) = (2a_2-p_1, 2b_2-q_1),$$
$$(p_3, q_3) = (2a_3-p_2, 2b_3-q_2),$$

to

$$(p_3, q_3) = \big(2(a_3-a_2+a_1)-p, 2(b_3-b_2+b_1)-q\big).$$

Symetria względem punktu $(a_3-a_2+a_1, b_3-b_2+b_1)$ jest zatem złożeniem symetrii względem punktów (a_1, b_1), (a_2, b_2) i (a_3, b_3).