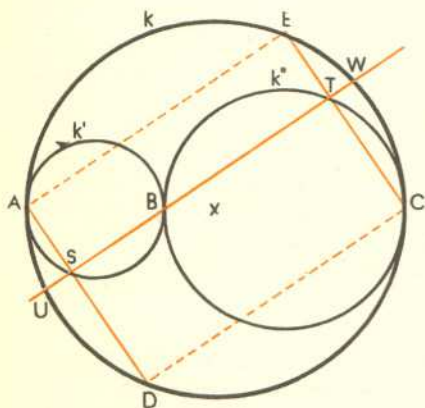




Szkic rozwiązania zadania M4.  
Wykorzystujemy wielokrotnie fakt, że kąt wpisany oparty na średnicy jest prosty.  
Jest  $AD \perp UW$ ,  $EC \perp UW$ , stąd  $AD \parallel EC$ ;  
 $AE \perp EC$ ,  $AD \perp DC$ .  
Czworokąt  $ADCE$  jest więc trapezem, którego dwa przeciwległe kąty (przy wierzchołkach  $D$  i  $E$ ) są proste. Jest on wobec tego prostokątem, a cięciwa  $UW$  jest równoległa do jednej pary jego boków, a więc  $US = TW$ .



i po prostym przekształceniu:

$$(3) \quad B = \frac{\nu_+^2 + \nu_-^2}{\nu_+^2 - \nu_-^2} B_1.$$

### JAK TO ZROBIĆ czyli przebieg doświadczenia

Dodatkowe pole  $B_1$  wytworzymy przy pomocy przewodnika kołowego z prądem (o  $n$  zwojach). Aby kierunki pól  $B$  i  $B_1$  były zgodne, należy ustawić przewodnik kołowy tak, aby jego płaszczyzna była prostopadła do kierunku swobodnej igły magnetycznej. Jako źródła prądu użyjemy baterijki. W obwód włączymy także żaróweczkę dla ustalenia wartości natężenia prądu. Schemat obwodu przedstawia rysunek. Praktycznie wygodnie posłużyć się latarką kieszonkową, w której obwód włączymy szeregowo przewodnik kołowy. W okrągłej latarce najlepiej zrobić to odkręcając jej tylną zakrętkę (ze sprężyną) i podłączając się między obudowę a dno baterii. Kto nie dysponuje przewodem izolowanym, może zrobić przewodnik kołowy nawijając długi przedłużacz lub sznur od żelazka na jakąś okrągłą formę np. kosz od śmieci. Połączenie należy tak wykonać, aby wykorzystywać oba przewody przedłużacza łącząc je szeregowo. Oczywiście liczbę zwojów będziemy wtedy liczyć podwójnie. Indukcję  $B_1$  (w  $T$ ) obliczymy ze wzoru:

$$B_1 = \frac{\mu_0 ni}{2R},$$

gdzie  $R$  jest promieniem przewodnika kołowego, a  $\mu_0 = 1,25 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$

przenikalnością magnetyczną próżni. Natężenie  $i$  (jeśli nie dysponujemy amperomierzem) odczytamy po prostu z cokołu żaróweczki przy założeniu, że siła elektromotoryczna baterii zgadza się z napięciem nominalnym żaróweczki, wypisanym na niej, a opór przewodu i opór wewnętrzny baterii jest do pominięcia. Częstotści  $\nu_+$  i  $\nu_-$  mierzymy, licząc wahnięcia w ciągu np. 1 minuty. Kto nie ma igły magnetycznej czy kompasu, może ją zrobić z kawałka drutu i dużego zatrasku, namagnesować magnesem i osadzić na igle do szycia białej tępyim końcem w korek. Napiszcie, jak Wam się udało.

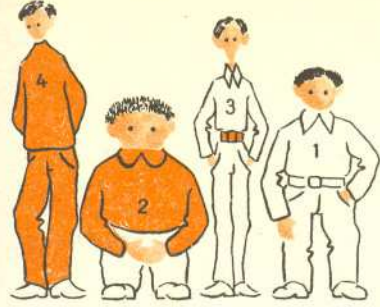
## Na pytanie co to jest dobry porządek odpowiada

prof. dr Andrzej MOSTOWSKI członek rzeczywisty PAN.



Będziemy zakładali, że Czytelnik zna dwa ogólne pojęcia matematyczne: pojęcie zbioru i pojęcie funkcji. Aby objaśnić, czym są zbiory dobrze uporządkowane, zdefiniujemy najpierw pojęcie relacji dwuczłonowej. Nazywamy tak funkcję dwu zmiennych, przebiegających jakiś zbiór, przyczem wartości funkcji należą do zbioru dwuelementowego złożonego z 0 i 1. Zbiór, który przebiegają zmienne, nazywamy zbiorem określoności relacji. Do oznaczania relacji używamy zazwyczaj liter  $R, S, \dots$ . Jeśli  $A$  jest zbiorem określoności relacji  $R$  i  $x, y$  są elementami  $A$ , to zamiast  $R(x, y) = 1$  piszemy zazwyczaj  $xRy$  i mówimy, że relacja  $R$  zachodzi między elementami  $x$  i  $y$ . Jeśli  $R(x, y) = 0$ , to piszemy  $x \text{ non-} Ry$  i mówimy, że relacja  $R$  nie zachodzi między  $x$  i  $y$ . Widzimy, że jeśli  $R$  jest relacją o zbiorze określoności  $A$ , to dla każdej pary uporządkowanej  $(x, y)$  elementów  $A$  ma miejsce albo  $xRy$  albo  $x \text{ non-} Ry$ . Zbiór wszystkich par  $(x, y)$  elementów  $A$  rozpada się więc na dwie klasy: klasę par  $(x, y)$  takich, że relacja zachodzi między  $x$  i  $y$ , i klasę par  $(x, y)$  takich, że relacja  $R$  nie zachodzi między  $x$  i  $y$ . Weźmy na przykład zbiór wszystkich prostych na jakiejś płaszczyźnie  $\pi$  i przyjmijmy  $R(x, y) = 1$ , jeśli proste  $x$  i  $y$  są do siebie prostopadłe,  $R(x, y) = 0$  w przypadku przeciwnym.  $R$  jest więc relacją prostopadłości między prostymi leżącymi na płaszczyźnie. Zbiorem określoności relacji jest zbiór wszystkich prostych leżących na  $\pi$ . Inny przykład relacji o tym samym zbiorze określoności otrzymamy przyjmując  $S(x, y) = 1$  gdy proste  $x$  i  $y$  są równoległe,  $S(x, y) = 0$  w przypadku przeciwnym.

Często spotyka się relacje spełniające pewne warunki: relację  $R$  o zbiorze określoności  $A$  nazywamy zwrotną, jeśli  $xRx$  dla każdego  $x$  należącego do  $A$ ; nazywamy ją antysymetryczną, jeśli warunek  $xRy$  wyklucza warunek  $yRx$  dla



W drugim rozwiązaniu na str. 6 błędnie przyjęto, że w rachunkach uwzględniamy najpierw siłę tarcia  $T$ , równowagę sił zsuwającą z równi  $F_T$ ; dopiero gdy maksymalna siła tarcia nie jest w stanie doprowadzić do równowagi, uzupełnia ją napięcie linki  $N$ .

W rzeczywistości nie ma żadnego powodu, by wyróżnić którąkolwiek z sił  $N$  i  $T$ . W sumie muszą one być takie, by spełniony był warunek równowagi (2). Ponadto siła tarcia musi być nie większa od swojej maksymalnej wartości:

$$(4) \quad |T| \leq \mu mg \cos \alpha.$$

Wartość bezwzględna w warunku (4) jest konieczna, gdyż siła tarcia może być skierowana zarówno do góry, jak na rys. 2, jak i do dołu. W tym ostatnim przypadku napięcie linki równoważy (równe jest sumie) przeciwnie skierowane siły: siłę tarcia  $T$  i siłę zsuwającą  $F_T$ .

Zwróćmy uwagę ponadto na kierunek siły  $N$ . Linka jest elastyczna, a więc w zadaniu siła napięcia sprężyny może działać na klocek tylko od góry;  $N \geq 0$ . Możemy więc, na mocy warunku (2) i (4) zapisać warunki równowagi:

$$(5) \quad |T| \leq mg \mu \cos \alpha \wedge 0 \leq N \leq mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha).$$

Warunek (5) określa tylko wartości maksymalne obu szukanych sił  $T$  i  $N$ . Ponadto muszą one spełniać warunek (2), który nie pozwala obliczyć wartości każdej z nich osobno.

W przypadku naszego zadania, można obliczyć siłę tarcia z warunku (2) tylko wtedy, gdy zadane jest z góry napięcie linki (nie przekraczające wartości wynikającej z warunku (5)), to znaczy gdy na przykład określimy siłę rozciągnięcia sprężyny w momencie stawiania klocków na równi.

Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że siły  $N$  i  $T$  nie osiągają równocześnie swych skrajnych wartości podanych w warunkach (5). Aby taką zgodność uzyskać, rozpatrzmy ponownie dwa przypadki:

a)  $\tan \alpha \leq \mu$ ; wówczas na mocy warunku (4) i równań (2) mamy

$$mg \sin \alpha \geq T \geq -\mu mg \cos \alpha \wedge 0 \leq N \leq mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha);$$

b)  $\tan \alpha > \mu$ ; wówczas na mocy warunku (4) i równań (2) mamy

$$mg \mu \cos \alpha > T > -\mu mg \cos \alpha \wedge$$

$\wedge mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) < N < mg(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)$ ,  
Nierówności powyższe, będące pełnym rozwiązaniem zadania, zapisane są w tym przypadku w ten sposób, że graniczne wartości sił  $N$  i  $T$  odpowiadają sobie wzajemnie.

dowolnych różnych między sobą elementów  $x, y$  należących do  $A$ ; nazywamy ją przechodnią, jeśli warunki  $xRy$  i  $yRz$  pociągają za sobą  $xRz$  dla dowolnych  $x, y, z$  należących do  $A$ ; wreszcie nazywamy ją spójną jeśli dla dowolnych, różnych  $x, y$  należących do  $A$  jest albo  $xRy$  albo  $yRx$ .

Czytelnik postąpi słusznie, jeśli przed dalszą lekturą przemyśli określenie (przy pomocy pojęcia funkcji) następujących relacji: (a) podzielności, (b) mniejszości, (c) niemniejszości, (d) różności, obierając za każdym razem zbiór wszystkich liczb naturalnych jako zbiór określoności relacji; ponadto dla każdej z tych relacji Czytelnik powinien rozstrzygnąć, które z określonych wyżej własności (zwrotność, antysymetria, przechodniość, spójność) relacja ta posiada.

Ogólna teoria relacji jest interesującym działem teorii mnogości. Tu jednak zajmiemy się jej fragmentem — teorią zbiorów uporządkowanych i dobrze uporządkowanych.

W matematyce, a także w jej zastosowaniach, mamy często do czynienia ze zbiorami, których elementy porównujemy ze sobą. Np. odcinki położone w przestrzeni możemy porównywać pod względem długości, liczby — pod względem wielkości, bryły geometryczne (wielościany) — pod względem objętości, ludzi — pod względem wzrostu itp. Oczywiście elementy jednego i tego samego zbioru możemy porównywać pod względem rozmaitych cech: np. zbiór dorosłych mieszkańców Polski możemy porównywać pod względem wzrostu, pod względem wieku, ale także pod względem numerów ich dowodów osobistych.

Wszystkie te przykłady są szczególnymi przypadkami pojęcia specjalnego systemu relacyjnego: nazywamy tak parę utworzoną ze zbioru  $A$  i relacji, dla której  $A$  jest zbiorem określoności (mówimy o specjalnym systemie, gdyż logicy rozpatrują systemy ogólniejsze, w których występuje więcej niż jedna relacja, i to nie konieczne dwuczłonowa). Np.  $A$  może być zbiorem dorosłych mieszkańców Polski, a  $R$  relacją „ $x$  jest wyższy od  $y$ ”; otrzymujemy wtedy system relacyjny odpowiadający jednemu z przykładów podanych wyżej. W innym przykładzie zbiór  $A$  jest taki sam, ale  $R$  jest relacją „ $x$  jest młodszy od  $y$ ”, w trzecim znów zbiór  $A$  jest niezmienny, a  $R$  jest relacją „numer dowodu osobistego „iksa” jest większy niż numer dowodu „igreką””.

Jeśli  $\langle A, R \rangle$  jest specjalnym systemem relacyjnym, w którym  $R$  jest relacją zwrotną, antysymetryczną, przechodnią i spójną, to mówimy, że zbiór  $A$  jest uporządkowany przez  $R$ . Najprostszym przykładem jest system  $\langle A, R \rangle$ , w którym  $A$  jest zbiorem liczb rzeczywistych, a  $R$  — relacją  $\leq$ . Często zamiast  $R$  piszemy wtedy symbol  $\leq_R$ , aby podkreślić analogię pomiędzy relacją  $R$ , a uporządkowaniem zbioru liczb przez relację „mniejszy lub równy”.

Jak widzimy, żaden zbiór  $A$  nie jest sam z siebie uporządkowany: musi być dopiero dana relacja o zbiorze określoności  $A$ , która porządkuje  $A$ , aby móc mówić o zbiorze uporządkowanym. Tym niemniej w tekstach matematycznych często używa się zwrotu „zbiór uporządkowany” gdy wybór relacji porządkującej  $R$  jest oczywisty z kontekstu.

Podamy kilka przykładów systemów  $\langle A, R \rangle$ , w których  $R$  jest relacją porządkującą  $A$ :

- (i)  $A$  jest zbiorem liczb naturalnych,  $R$  — relacją  $\leq$ ;
- (ii)  $A$  jest zbiorem liczb naturalnych,  $R$  — relacją  $\geq$ ;
- (iii)  $A$  jest zbiorem liczb naturalnych,  $R$  — relacją taką, że  $xRy$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $x$  ma mniej czynników pierwszych niż  $y$  lub też  $x$  ma tyle samo czynników pierwszych, co  $y$  i  $x \leq y$ ;
- (iv)  $A$  jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych nieujemnych, a  $R$  — relacją  $\leq$ ;
- (v)  $A$  jest zbiorem liczb zespolonych postaci  $m + ni$ , gdzie  $m$  i  $n$  są liczbami naturalnymi,  $R$  — relacją taką, że  $(m + ni) R (p + qi)$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy  $m < p$  lub też  $m = p$  i  $n \leq q$ .

Zauważmy, że w przykładzie (iii) zachodzą np. wzory  $2R3, 3R4, 4R5, 25R6, 111R6, 125R30$ ; relacja  $R$  jest więc zupełnie różna od relacji  $\leq$ . Przykład (v) możemy zilustrować geometrycznie, utożsamiając liczbę  $m + ni$  z punktem o współrzędnych  $(m, n)$ . Relacja  $R$  zachodzi między liczbami  $m + ni$  oraz  $p + qi$  wtedy, gdy punkt  $(m, n)$  leży na lewo od punktu  $(p, q)$  lub też, gdy oba te punkty leżą na tej samej prostej pionowej, ale punkt  $(m, n)$  leży niżej niż  $(p, q)$  albo pokrywa się z  $(p, q)$ .

Będziemy odąd pisali  $x \leq_R y$  zamiast  $xRy$  i czytali ten wzór „ $x$  poprzedza  $y$ ” lub „ $x$  jest wcześniejsze od  $y$ ”, względnie „ $y$  następuje po  $x$ ” albo „ $y$  jest późniejsze od  $x$ ”. Zwrotów tych używamy także, gdy  $x$  jest identyczne z  $y$ .

Niech  $R$  będzie relacją porządkującą  $A$  i niech  $X$  będzie podzbiorem  $A$ , różnym od  $A$  lub równym  $A$ . Element  $x$  zbioru  $X$  nazywamy pierwszym elementem tego zbioru, jeśli każdy element  $X$  jest późniejszy od  $x$ . Tak np. w przykładzie (i) każdy niepusty podzbiór  $A$  ma pierwszy element: jest to mianowicie najmniejsza liczba należąca do tego podzbioru. Podobnie jest w przykładzie (iii): aby otrzymać pierwszy element zbioru  $X$ , rozpatrujemy te liczby należące do  $X$ , które mają możliwie najmniejszą liczbę czynników pierwszych i wybieramy spośród nich liczbę najmniejszą. Również w przykładzie (v) każdy niepusty podzbiór zbioru  $A$  ma element pierwszy, jak to Czytelnik zechce sam sprawdzić. W przykładzie (iii) tylko skończone podzbiory  $X$  zbioru  $A$  mają elementy pierwsze. Liczba  $x$  jest bowiem elementem pierwszym zbioru  $X$ , gdy jest największą liczbą tego zbioru.

Możemy teraz podać określenie zbioru dobrze uporządkowanego. Mówimy, że zbiór  $A$  jest dobrze uporządkowany przez relację  $R$ , jeśli spełnione są dwa warunki:

- (1) Relacja  $R$  porządkuje  $A$ ;
- (2) Każdy niepusty podzbiór  $A$  ma element pierwszy.

Korzystając z przedyskutowanych wyżej przykładów (i) — (v) Czytelnik może teraz podać przykłady zbiorów dobrze uporządkowanych, jak też przykłady zbiorów uporządkowanych, które nie są dobrze uporządkowane.

Samo podanie definicji nie stanowi jeszcze pełnej odpowiedzi na pytanie, czym są zbiory dobrze uporządkowane. Pełną odpowiedź uzyskujemy dopiero zapoznając się z rolą, jaką to pojęcie odgrywa w matematyce, jakie są jego własności, zastosowania i do jakich ogólniejszych problemów prowadzi jego dyskusowanie.

Pewne uwagi na ten temat przyniesie druga część artykułu, która znajdzie się w następnym numerze.

## O podstawach holografii

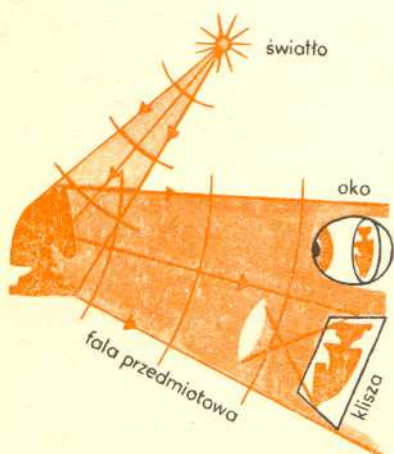
*prof. dr Bohdan KARCZEWSKI*

Słowo „holografia” nie powinno dziś być Czytelnikowi obce. Występuje ono bowiem bardzo często nie tylko na łamach poważnych czasopism naukowych, ale zdołało już trafić do piśmiennictwa popularno-naukowego, a nawet do prasy codziennej. Dlaczego termin niewątpliwie naukowy coraz bardziej się upowszechnia i dla coraz większego grona ludzi nabiera treści znaczących? Odpowiedź na to pytanie jest celem naszego artykułu.

Wszystko zaczęło się w 1948 r., kiedy to Denis Gabor, fizyk angielski pochodzenia węgierskiego, zaproponował nową, dwuetapową metodę otrzymywania obrazów optycznych. Źródła teoretyczne pomysłu Gabora tkwiły we wcześniejszych pracach W. L. Bragga i polskiego fizyka M. Wolfkego. Metoda ta w sposób zasadniczy różniła się od klasycznej fotografii. Okazało się jednak bardzo szybko, iż idea Gabora była tak trudna w realizacji doświadczalnej, że nie wrócono jej przyszłości. Zasadniczy zwrot nastąpił w latach 1962–1964 dzięki badaniom fizyków amerykańskich. E. N. Leitha i J. Upatnieksa, oraz fizyka radzieckiego J. N. Denisiuka. Uczonym tym udało się nie tylko usunąć wszystkie niedomogi oryginalnego pomysłu Gabora, ale też pomysł ów niesłychanie wzbogacić i, co więcej, ukazać jego olbrzymie znaczenie praktyczne.

Od tego czasu datuje się bujny rozkwit badań nad dwuetapową metodą otrzymywania obrazów optycznych, zwaną inaczej metodą rekonstrukcji frontu falowego, lub krócej — hologafią. Aby dobrze zrozumieć istotę holografii, tym bowiem gaborowskim określeniem będziemy się dalej posługiwać, zastanówmy się przez chwilę nad tym, jak widzimy różne przedmioty w naturze i co z tego możemy zarejestrować klasycznymi metodami na kliszy fotograficznej.

Każdy przedmiot możemy traktować jako składający się z wielkiej liczby punktów rozpraszających lub promieniujących światło. Fale pochodzące od tych punktów składają się w sumie na bardzo złożoną tzw. falę przedmiotową. Soczewki oczne przekształcają tę falę tak, że na siatkówkach oczu powstają mało różniące się obrazy (płaskie) przedmiotu, dzięki czemu mózg nasz odbiera przestrzenny jego obraz. Zmieniając punkt widzenia lub obracając przedmiot, możemy go oglądać z dowolnej strony (rys. 1).



Rys. 1