opis konstrukcji — to zupełnie inne zagadnienie. Zagadnienie — powiedziałbym — dosyć niewdzięczne. Znamy dwie metody „wbijania kołeczków", mianowicie metodę Dedekinda i metodę Cantora. Obydwie są bardzo precyzyjne i obydwie mają tę samą wielką wadę: zaciemniają mniej istotnymi szczegółami technicznymi podstawową, jasną i prostą intencję konstrukcji. Dlatego nie przytoczymy tu żadnej z nich. Wspomnimy tylko o zasadniczej różnicy między tymi metodami. Oczywiście kołeczki muszą być z czegoś zrobione, z jakiegoś tworzywa, naturalnie z jakiegoś abstrakcyjnego tworzywa pojęć matematycznych. Otóż metody Cantora i Dedekinda różnią się głównie materiałem, z którego zrobione są kołeczki. W metodzie Dedekinda kołeczkiem zatykającym dziurę jest sama dziura! Dziurę zatyka się nią samą! Można powiedzieć, że w metodzie tej koszty zużycia materiałów zostały doprowadzone do minimum, do zera!

Konstrukcja została wykonana, kołeczki są wbite. Pozostało nam sprawdzić, czy robota została rzetelnie wykonana, czy przypadkiem w trakcie wbijania nie powstały jakieś nowe dziury. Na szczęście wszystko jest w absolutnym porządku, zbiór liczb rzeczywistych jest całkowicie szczelny. Przytoczoną definicję dziury można wprawdzie sformułować w odniesieniu do liczb rzeczywistych, nie ma jednak potrzeby wprowadzania takiego pojęcia, po prostu w ogóle nie ma takich dziur.

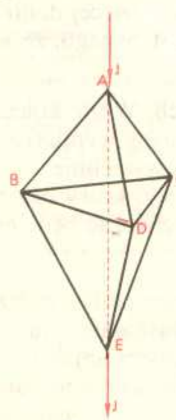
Okazuje się, że zbiór liczb rzeczywistych ma własności jeszcze lepsze, niż zbiór liczb wymiernych. Można ten zbiór uporządkować, można uogólnić podstawowe działania arytmetyczne, dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie na liczby rzeczywiste, ale ponadto można w tym zbiorze wykonywać bez żadnych ograniczeń wiele innych pożytecznych operacji matematycznych, jak pierwiastkowanie, potęgowanie, logarytmowanie itp., których wykonalność w dziedzinie liczb wymiernych była mocno utrudniona, jeśli nie wręcz niemożliwa.

Okazało się ponadto, że w oparciu o pojęcie liczby rzeczywistej można zbudować całą analizę matematyczną, olbrzymią gałąź współczesnej matematyki. U podstaw wszystkich twierdzeń tej części matematyki leży „szczelność" zbioru liczb rzeczywistych (matematycy zawodowi używają przymiotnika „zupełny" zamiast „szczelny"). Twierdzenia analizy matematycznej przestają być prawdziwe, jeśli zbiór liczb rzeczywistych zastąpić przez zbiór liczb wymiernych. To właśnie mieliśmy na myśli, mówiąc żartobliwie o przeciekaniu wiedzy matematycznej przez dziury zbioru liczb wymiernych. Pojęcie liczby rzeczywistej jest niezbędne dla całej matematyki teoretycznej. Jest również niezbędne dla formowania ogólnych metod matematyki stosowanej aż do momentu, gdy w grę wchodzą przybliżone rachunki na konkretnych liczbach. Wtedy powracamy do bardziej elementarnych liczb wymiernych.

Niewątpliwie pojęcie liczby wymiernej jest prostsze niż pojęcie liczby rzeczywistej. Dla laika liczba rzeczywista, wprowadzona metodą Cantora lub Dedekinda, wydaje się być tworem dość mistycznym, wydaje się być znacznie mniej rzeczywistą — w potocznym znaczeniu tego słowa — niż liczba wymierna. Dla zawodowego matematyka liczba rzeczywista jest podstawowym narzędziem pracy, jest równie rzeczywista jak inne pojęcia matematyczne. Liczby rzeczywiste są równie rzeczywiste jak liczby wymierne, jedne i drugie są bowiem poprawnie zdefiniowanymi pojęciami istniejącymi w mózgu matematyka. Jedne i drugie mają ten sam typ realności.

Zadania

redaguje dr Jędrzej JĘDRZEJEWSKI



F1. Z prostych odcinków identycznego drutu oporowego zbudowano obwód elektryczny przedstawiony na rysunku. Prąd o natężeniu I dopływa do węzła A i wypływa z węzła E wzdłuż prostej AE, która jest prostopadła do płaszczyzny trójkąta równobocznego BCD utworzonego przez węzły B, C i D. Bryłę $ABCDE$ można uważać za dwa połączone podstawami ABC prawidłowe ostrosłupy trójkątne, każdy o innej wysokości. Wykazać, że w nieograniczonym ośrodku jednorodnym, w każdym punkcie odcinka AE wartość indukcji magnetycznej $\mathbf{B}$ wynosi zero. Rozwiązanie na str. 15.

redaguje mgr Andrzej MĄKOWSKI

M1. Udowodnić, że boki a, b, c trójkąta ABC spełniają równość $b^2 = a(a+c)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle BAC$.
(z pracy D. Rameshwara Rao)
Rozwiązanie na str. 9.

M2. Znaleźć liczby rzeczywiste p i q, które są pierwiastkami równania $x^2+px+q=0$ (ze względu na zmienną x).
(V. Gutenmacher) Rozwiązanie na str. 8.

M3. Dla jakich wartości rzeczywistych m układ równań

$$x^2+y^2 = m$$
$$-x^2+y = 2$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?
(R. Hajłasz) Rozwiązanie na str. 10.