Sześć zadań – jedno rozwiązanie

dr Maciej BRYŃSKI

Rozwiążemy sześć bardzo prostych zadań. Sformułowanie każdego zadania będzie inne, w każdym zadaniu będziemy zajmowali się innymi obiektami: w jednym przekształceniami płaszczyzny, w innym liczbami, w jeszcze innym dniami tygodnia. Zwróćmy jednak baczną uwagę na rozwiązania tych zadań. Są one bardzo podobne. Może to podobieństwo pozwoli na wprowadzenie schematu, który będzie obejmował rozwiązania wszystkich sześciu zadań?

Zadanie 1. Rozpatrzmy obrót płaszczyzny dokoła ustalonego punktu 0 o kąt $45°$. Jakim przekształceniem płaszczyzny jest 100-krotne złożenie tego obrotu?

Rozwiązanie: Ponieważ $100 = 12 \cdot 8 + 4$, a ośmiokrotne złożenie danego obrotu jest przekształceniem tożsamościowym, więc w wyniku 100-krotnego złożenia obrotu o $45°$ otrzymamy przekształcenie identyczne z obrotem o $4 \cdot 45° = 180°$

Zadanie 2. Jaka najmniejsza wielokrotność liczby 6 jest podzielna przez 8? Ile różnych reszt z dzielenia przez 8 można otrzymać rozpatrując wszystkie wielokrotności liczby 6?

Rozwiązanie: Liczba $6n$ jest podzielna przez 8, gdy n jest podzielne przez 4. Wobec tego najmniejszą liczbą spełniającą warunki zadania jest 24. Ponieważ $6 = 0 \cdot 8 + 6$, $2 \cdot 6 = 1 \cdot 8 + 4$, $3 \cdot 6 = 2 \cdot 8 + 2$, $4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$, więc z pewnością są co najmniej cztery różne reszty: $0, 2, 4, 6$. Dla stwierdzenia, że są to wszystkie możliwe reszty, przeprowadzimy następujące rozumowanie: zauważyliśmy poprzednio, że $6n$ przy n podzielnym przez 4 dzieli się bez reszty przez 8; gdy $n = 4k+1$, to $6n = 6(4k+1) = 24k+6$ — ta liczba daje przy dzieleniu przez 8 resztę 6; gdy $n = 4k+2$, to $6n = 24k+12$ — tu otrzymamy resztę 4; gdy zaś $n = 4k+3$, to $6n = 24k+18$ — tu reszta jest 2. Widzimy więc, że przy kolejnych wielokrotnościach liczby 6, reszty z dzielenia przez 8 powtarzają się cyklicznie: $0, 6, 4, 2$. Reszt jest zatem dokładnie cztery.

Zadanie 3. Niech $\mathbf{T}$ oznacza przesunięcie płaszczyzny o wektor $\mathbf{w}$, którego długość wynosi $\frac{1}{8}$. Ile razy należy powtórzyć to przekształcenie, by otrzymać przesunięcie o wektor, którego długość jest liczbą całkowitą? Co można powiedzieć o n-krotnym złożeniu przesunięcia $\mathbf{T}$?

Rozwiązanie: Szukamy takiej liczby naturalnej n, by $\frac{1}{8} \cdot n$ było liczbą całkowitą. Oczywiście n musi być liczbą podzielną przez 8. Najmniejszą taką liczbą jest właśnie 8. Jeśli n nie jest liczbą podzielną przez 8; $n = 8k+r$ $(r = 1, 2, \ldots, 7)$, to n-krotne złożenie przesunięcia $\mathbf{T}$ jest przesunięciem o wektor, którego długość wynosi $\frac{1}{8}(8k+r) = k + \frac{r}{8}$. Długość ta różni się od liczby całkowitej o $\frac{r}{8}$.

Zadanie 4. Każdy z 30 uczestników obozu harcerskiego kolejno pełni godzinną wartę. Najmłodszy z nich pierwszego dnia pełnił wartę w godzinach 12—13. W jakich godzinach przypadnie jego szósta kolejna warta?

Rozwiązanie: Interesująca nas zmiana warty nastąpi po 150 godzinach ($150 = 30 \cdot 5$, a wszyscy harcerze muszą pełnić wartę pięciokrotnie). Doba ma 24 godziny; $150 = 6 \cdot 24 + 6$, a więc następna warta wypadnie po upływie sześciu dni o 6 godzin później od pierwszej warty. Będzie to więc godzina 18. Nietrudno zauważyć, że każda następna warta wypada mu o sześć godzin później niż poprzednia; godziny jego dyżurów są 12—13, 18—19, 0—1, 6—7 (oczywiście każdego dnia będzie miał najwyżej jedną wartę).

Zadanie 5. 1 stycznia 1974 r. wypada we wtorek. Jakim dniem tygodnia będzie 31 stycznia 1974 r? Jakim dniem tygodnia będzie setny dzień 1974 r?

Rozwiązanie: Od 1 stycznia do 31 stycznia upłynie 30 dni. Ponieważ $30 = 4 \cdot 7 + 2$, więc numer dnia tygodnia zmieni się o 2; interesującym nas dniem będzie czwartek. Podobnie $99 = 14 \cdot 7 + 1$, więc setnym dniem 1974 r. będzie środa (10.IV.74).

Zadanie 6. Jaka jest ostatnia cyfra liczby 2^{1001}?

Rozwiązanie: Rozpatrzmy kilka kolejnych potęg liczby 2: $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots$ Ostatnie cyfry tych liczb powtarzają się cyklicznie $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, \ldots$, przy czym mamy tu następującą regułę: ostatnia cyfra liczby 2^n jest 2, gdy $n = 4k+1$, 4 — gdy $n = 4k+2$, 8 — gdy $n = 4k+3$, 6 — gdy $n = 4k$. (Skrupulatny Czytelnik nie omieszka przeprowadzić dokładnego dowodu indukcyjnego tego faktu). Wobec tego liczba 2^{1001} ma ostatnia cyfrę 2, bo $1001 = 250 \cdot 4 + 1$.

Czytelnik, który cierpliwie doczytał do tego miejsca, bez wątpienia zauważył wspólny schemat wszystkich sześciu rozwiązań. W każdym bowiem zadaniu mieliśmy do czynienia z taką sytuacją, że pewna wielokrotność wyjściowego elementu była mu równa; następne wielokrotności powtarzały się cyklicznie. Zbudujmy prosty model ilustrujący tę sytuację: Ustalmy liczbę naturalną n i w zbiorze $0, 1, \ldots, n-1$ określmy działanie $\oplus$ według następującej reguły:
$a \oplus b =$ reszta z dzielenia $(a+b)$ przez n.
Zbiór $0, 1 \ldots, n-1$ wraz z określonym wyżej działaniem nazywamy grupą cykliczną $\mathbf{C}_n$. Działanie w grupie $\mathbf{C}_n$ jest określone w ten sposób, że każdy element tej grupy jest wielokrotnością elementu 1.

$$2 = 1 \oplus 1,\ 3 = 1 \oplus 1 \oplus 1, \ldots,\ n-1 = \underbrace{1 \oplus 1 \oplus \ldots \oplus 1}_{(n-1)\text{ razy}},\quad \underbrace{0 = 1 \oplus 1 \oplus \ldots \oplus 1}_{n\text{ razy}};$$

następne wielokrotności powtarzają się cyklicznie.
Powróćmy jeszcze na chwilę do rozwiązanych poprzednio zadań:

1.
Powtarzanie obrotu o $45°$ odpowiada dodawaniu elementu 1 grupy $\mathbf{C}_8$ do siebie.

$$\underbrace{1 \oplus 1 \oplus \ldots \oplus 1 = 4}_{100\text{ razy}}$$

2.
W grupie $\mathbf{C}_8$ $6 \oplus 6 = 4$, $6 \oplus 6 \oplus 6 = 2$, $6 \oplus 6 \oplus 6 \oplus 6 = 0$, $6 \oplus 6 \oplus 6 \oplus 6 \oplus 6 = 6$, następne wielokrotności powtarzają się cyklicznie. Równość $6 \oplus 6 \oplus 6 \oplus 6 = 0$ jest równoważna temu, że $6+6+6+6$ dzieli się przez 8.

3.
Ponieważ interesują nas tylko części ułamkowe długości wektora przesunięcia, będącego wielokrotnością przesunięcia $\mathbf{T}$, więc możemy dodawać wielokrotności wektora $\mathbf{w}$ tak, jak

Błąd na str. 10 polega na tym, że równanie $y^2+y-(m+2) = 0$ może mieć dwa rozwiązania, choć układ będzie miał jedno rozwiązanie; jednej z wartości y może nie odpowiadać żadna wartość x.
Poprawne rozwiązanie jest następujące: jeżeli liczby x, y spełniają układ, to liczby $-x, y$ też go spełniają. Układ ma więc jedno rozwiązanie tylko wtedy, gdy $x = 0$ i wówczas $y = 2$. Jedynym rozwiązaniem jest wówczas $x = 0$, $y = 2$ czyli musi być $m = 4$.

Odpowiedź na pytanie 1 ze str. 15.
W ośrodku niejednorodnym wartości bezwzględne indukcji B_A, B_B, B_C nie muszą być równe.

elementy $\mathbf{C}_8$: $k \cdot \mathbf{w} + l \cdot \mathbf{w} = (k \oplus l) \cdot \mathbf{w}$. Stąd dla $n = 8k + r (0 \leqslant r < 8)$ część ułamkowa długości wektora $n \cdot \mathbf{w}$ wynosi $r \cdot \frac{1}{8}$.

4.
W grupie $\mathbf{C}_{24}$ (doba ma *24* godziny)

$$\underbrace{1 \oplus 1 \oplus \ldots \oplus 1}_{150 \text{ razy}} = 6.$$

Oznacza to, że termin następnej warty wypada o *6* godzin później niż warty poprzedniej. W tej samej grupie $6 \oplus 6 \oplus 6 \oplus 6 \oplus 6 = 6$, więc szósta warta wypadnie o *6* godzin później niż pierwsza.

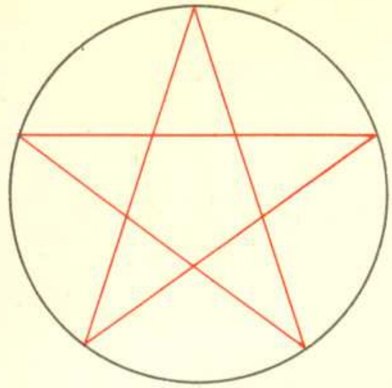
5.
Numery dni tygodnia należy dodawać tak, jak elementy grupy $\mathbf{C}_7$. W tej grupie

$$\underbrace{1 \oplus 1 \oplus \ldots \oplus 1}_{30 \text{ razy}} = 2 \quad \text{a} \quad \underbrace{1 \oplus 1 \oplus \ldots \oplus 1}_{99 \text{ razy}} = 1$$

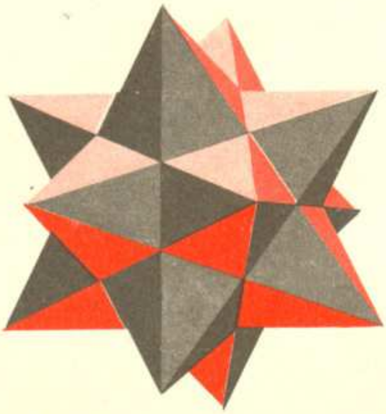
6.
Stwierdziliśmy, że ostatnie cyfry liczby 2^n powtarzają się cyklicznie przy zmianie n o *4*. Można więc zastąpić wykładnik n przez element

$$\underbrace{1 \oplus 1 \oplus \ldots \oplus 1}_{n \text{ razy}} \text{ grupy } \mathbf{C}_4, \quad \text{a} \quad \underbrace{1 \oplus 1 \oplus \ldots \oplus 1}_{1001 \text{ razy}} = 1.$$

Stąd ostatnią cyfrą jest *2*.
Jak więc widzimy, rozwiązanie każdego z naszych zadań polegało na wykonaniu pewnych działań w odpowiednio dobranej grupie cyklicznej $\mathbf{C}_n$.



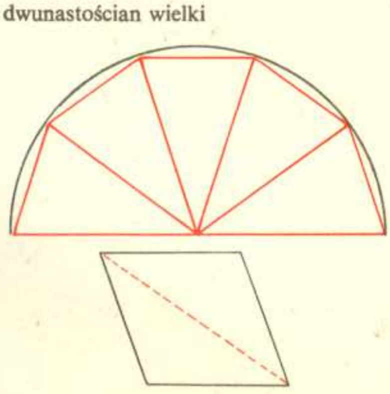
pięciokąt foremny gwiaździsty



dwunastościan gwiaździsty mały

Łamana zwyczajna to taka, która (mówiąc po prostu) nie przecina się sama ze sobą.

dwunastościan wielki



Wielościany gwiaździste

Jeśli przy definiowaniu wielokąta zrezygnujemy z warunku, aby łamana tworząca go była zwyczajna, otrzymamy nową klasę wielokątów foremnych, tzw. gwiaździstych.

Co otrzymamy, jeśli pójdziemy dalej i dopuścimy, aby takie wielokąty były ścianami wielościanów, rezygnując przy tym z analogicznego warunku, który ścianom wielościanów nie pozwalał przecinać się ze sobą? Otóż wtedy do grona znanych nam wielościanów foremnych (czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan foremny) dojdą jeszcze cztery.

Zauważmy, że jeżeli w pięciokącie foremnym odpowiednio przedłużymy boki, to otrzymamy pięciokąt foremny gwiaździsty. Wykorzystamy to przy konstrukcji pierwszego wielościanu. Weźmy więc dwunastościan foremny, którego ścianami są pięciokąty i przedłużmy jego krawędzie aż do ich przecięcia. Otrzymamy w ten sposób dwunastościan gwiaździsty mały. Pamiętajmy czym są jego ściany! Ponieważ łamana, która tworzy pięciokąt gwiaździsty, nie rozcina płaszczyzny na dwie rozłączne figury, więc nie możemy tu mówić o wielokącie, jako o części płaszczyzny ograniczonej łamaną. Tak więc wielościan ten jest zbudowany wyłącznie z odcinków.

Drugi z kolei wielościan, dwunastościan wielki, otrzymamy przedłużając odpowiednio, również w dwunastościanie foremnym, jego ściany. Ścianami jego będą „normalne" pięciokąty, ale jak już wspominaliśmy, będą się one ze sobą przecinały.

Ponieważ obydwa te wielościany są bardzo efektowne, warto wykonać ich modele. Model pierwszego, zgodnie z poprzednimi uwagami, należałoby wykonać właściwie z drutu, patyczków itp. Byłoby to jednak trudniejsze technicznie, dlatego skonstruujemy model taki jak na rysunku, pamiętając jednak, że naprawdę liczą się tylko krawędzie. Nie będziemy podawać całej jego siatki, gdyż łatwiej jest wykonać dwanaście ostrosłupów i następnie połączyć je np. taśmą samolepiącą. Siatkę jednego ostrosłupa tworzy połowa dziesięciokąta foremnego, czego łatwy dowód pozostawiamy Czytelnikowi.

Przy drugim modelu będziemy się musieli nieco więcej napracować. Można wprawdzie wyciąć siatkę i skleić wielościan, jednak wpłynęłoby to ujemnie na jego trwałość. Dlatego proponujemy wyciąć trzydzieści przystających rombów o kącie ostrym 72°, naciąć i zgiąć wzdłuż dłuższej przekątnej, a następnie, kierując się rysunkiem, skleić model.

Jeśli, jako punkt wyjścia weźmiemy dwudziestościan foremny, w podobny sposób otrzymamy dwa pozostałe wielościany.

Uważny Czytelnik po sklejeniu obu modeli na pewno zauważy, jaki zachodzi związek pomiędzy tymi wielościanami.

J. B.