Załącznik do omówienia ligi matematycznej w roku szkolnym 2023/24

Spis rozwiązań:

Janusz Olszewski

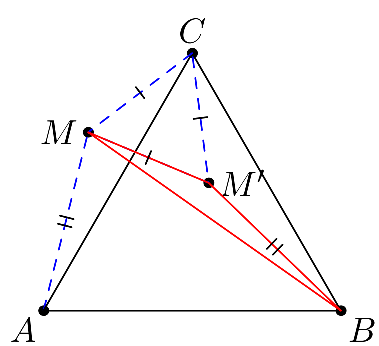
Zadanie nr 870 (*Delta* nr 11 (594) 2023)
(a) Wykazać, że z odcinków łączących dowolny punkt płaszczyzny z wierzchołkami trójkąta równobocznego (leżącego w tej płaszczyźnie) można zbudować pewien trójkąt (być może zdegenerowany).
(b) Trójkąt równoboczny jest zanurzony w przestrzeni (trójwymiarowej). Wyjaśnić, czy – analogicznie – zawsze można z odcinków łączących dowolny punkt przestrzeni z wierzchołkami tego trójkąta zbudować pewien trójkąt (być może zdegenerowany).

Zadanie 870 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązanie

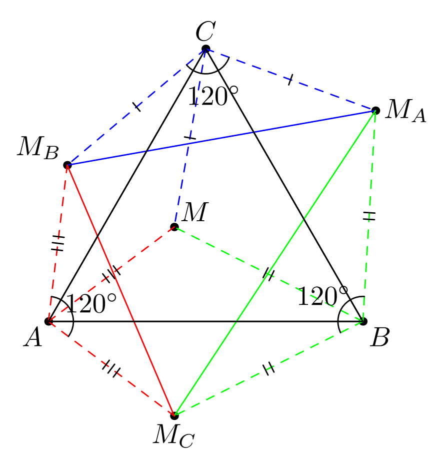
(a) Sposób 1 (obrót o kąt 60° wokół wierzchołka trójkąta)

Niech M będzie dowolnym punktem leżącym w płaszczyźnie trójkąta równobocznego ABC. Możemy założyć, że $M \neq C$.
Niech M' będzie obrazem punktu M przy obrocie $R_C^{60^\circ}$ wokół punktu C o kąt 60°. Obrazem trójkąta CMA w tym obrocie jest trójkąt $CM'B$. Trójkąt CMM' jest więc równoboczny (bo $CM = CM'$ i $\sphericalangle MCM' = 60^\circ$). Trójkąt BMM' ma boki długości $BM' = AM$, BM, $MM' = AM$. Być może jest to trójkąt zdegenerowany - gdy punkt M leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.



(a) Sposób 2 (symetria względem prostych zawierających boki)

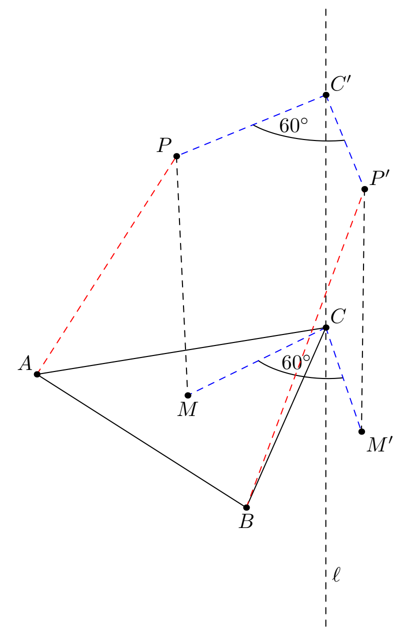
Niech M będzie dowolnym punktem w płaszczyźnie trójkąta równobocznego ABC. Niech M_A, M_B i M_C będą punktami symetrycznymi do M odpowiednio względem prostych BC, AC i AB. Wówczas kąty w wierzchołkach A, B i C trójkątów AM_BM_C, BM_AM_B i CM_AM_B wynoszą[a] po 120° . Ponieważ $AM = AM_B = AM_C$, więc $M_BM_C = \sqrt{3}MA$. Podobnie $M_AM_C = \sqrt{3}MB$, $M_AM_B = \sqrt{3}MC$. Tak więc trójkąt $M_AM_BM_C$ jest podobny do trójkąta o bokach MA, MB, MC.



[a]wynika to z łatwego rachunku na kątach albo z faktu, że złożenie dwóch symetrii osiowych względem prostych jest obrotem o kąt 2α, gdzie α jest kątem miedzy tymi prostymi

(b) Sposób 1 (obrót o kąt 60° wokół osi)

W przestrzeni dany jest trójkąt równoboczny ABC oraz punkt P. Możemy założyć, że punkt P nie leży na prostej ℓ prostopadłej do do płaszczyzny trójkąta ABC przechodzącej przez punkt C. Rzut prostokątny punktu P na prostą ℓ oznaczmy przez C'. Rozważmy obrót $R_\ell^{60^\circ}$ o kąt 60° wokół prostej ℓ. Niech P' będzie obrazem punktu P w rozważanym obrocie. Rzuty prostokątne punktów P i P' na płaszczyznę trójkąta ABC oznaczmy przez M i M'. W rozważanym obrocie obrazem czworościanu $PAMC$ jest czworościan $P'BM'C$. Ponadto, bryła $PP'C'MM'C$ jest graniastosłupem prawidłowym trójkątnym. Stąd $PA = P'B$, $PC = PM' = P'M$. Korzystając z nierówności trójkąta mamy



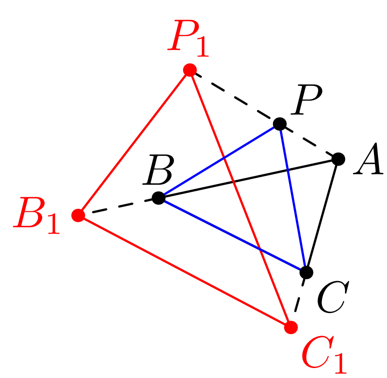
(1) $PC = P'M \leqslant P'B + BM \leqslant P'B + BP = PA + PB$,

(2) $PA = P'B \leqslant P'M + MB \leqslant PC + PB$,

(3) $PB \leqslant PM' + M'B \leqslant PC + BP' = PC + AP$.

(b) Sposób 2 (inwersja wzgledem sfery)

W przestrzeni dany jest trójkąt równoboczny ABC oraz punkt P. Możemy założyć, że $P \neq A$. Oznaczmy $AB = BC = CA = a$. Niech B_1, C_1, P_1 będą obrazami punktów B, C, P w inwersji względem sfery o środku w punkcie A i promieniu 1. Wówczas $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1 = AP \cdot AP_1 = 1$. Stąd i z tego, że odpowiednie kąty płaskie przy wierzchołku A czworościanów $ABCP$ i $AB_1C_1P_1$ są równe wynika podobieństwo następujących par trójkątów ABP i AP_1B_1, ACP i AP_1C_1, ABC i AC_1B_1.



Ze wskazanego podobieństwa i z wcześniejszych równości mamy

$$\frac{BP}{P_1B_1} = \frac{AP}{AB_1} = AP \cdot AB, \quad \frac{CP}{P_1C_1} = \frac{AP}{AC_1} = AP \cdot AC, \quad \frac{BC}{C_1B_1} = \frac{AB}{AC_1} = AB \cdot AC.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{AP \cdot AB \cdot AC} = \frac{P_1B_1}{BP \cdot AC} = \frac{C_1P_1}{CP \cdot AB} = \frac{B_1C_1}{AP \cdot BC}$$

Zatem trójkąt $B_1P_1C_1$ jest podobny do trójkąta o bokach $BP \cdot AC = a \cdot BP$, $CP \cdot AB = a \cdot CP$ i $AP \cdot BC = a \cdot AP$.

Rozwiązanie zadania 871

Marcin Kasperski, 15 stycznia 2024

Zadanie 871

Dana jest liczba całkowita parzysta $n > 0$.

(a) *Dowieść, że w przedziale $[n+1, 2n+1]$ zawiera się n-elementowy zbiór liczb całkowitych M taki, że żaden jego element nie jest dzielnikiem sumy wszystkich liczb zbioru M.*

(b) *Wyjaśnić, czy zawsze istnieją $($w tym przedziale$)$ co najmniej dwa różne zbiory n-elementowe o powyższych własnościach.*

Uwagi uzupełniające

Przyglądając się przykładom (rachunki pominę, wykonałem je nietrudnym programem) można zauważyć, że warunki zadania powinny dać się znacznie wzmocnić.

Będę pisał że liczby s_k są *czyste* gdy nie mają żadnych dzielników ze zbioru $[n+1, 2n+1]$ a *legalne* gdy jedynym dzielnikiem z tego zbioru jest liczba którą dopuszczamy, czyli (wykreślone) k.

Szczegółowy stan dla początkowych liczb:

- dla $n = 2$ (dzielniki $3, \ldots, 5$, sumy $7, \ldots, 9$) czyste: 7, legalne: 8, 9;
- dla $n = 4$ (dzielniki $5, \ldots, 9$, sumy $30, \ldots, 26$) czyste: 29, 26, legalne: 28,
- dla $n = 6$ (dzielniki $7, \ldots, 13$, sumy $63, \ldots, 57$) czyste: 62, 61, 59, 58, 57,
- dla $n = 8$ (dzielniki $9, \ldots, 17$, sumy $108, \ldots, 100$) czyste: 107, 106, 103, 101, legalne: 104,
- dla $n = 10$ (dzielniki $11, \ldots, 21$, sumy $165, \ldots, 155$) czyste: 164, 163, 161, 159, 158, 157, 155,
- dla $n = 12$ (dzielniki $13, \ldots, 25$, sumy $234, \ldots, 222$) czyste: 233, 232, 229, 227, 226, 223, 222, legalne: 228,
- dla $n = 14$ (dzielniki $15, \ldots, 29$, sumy $315, \ldots, 301$) czyste: 314, 313, 311, 310, 309, 307, 305, 303, 302, 301,
- dla $n = 16$ (dzielniki $17, \ldots, 33$, sumy $408, \ldots, 392$) czyste: 407, 404, 402, 401, 398, 397, 395, 394, 393,
- dla $n = 18$ (dzielniki $19, \ldots, 37$, sumy $513, \ldots, 495$) czyste: 511, 509, 508, 507, 505, 503, 502, 501, 499, 498, 497,
- dla $n = 20$ (dzielniki $21, \ldots, 41$, sumy $630, \ldots, 610$) czyste: 628, 626, 623, 622, 619, 618, 617, 614, 613, 611, 610, legalne: 620,

Podobnie jest i dalej (już bez wypisywania szczegółów):

- dla $n = 22$ czystych 14, legalnych 0
- dla $n = 24$ czystych 15, legalnych 1
- dla $n = 26$ czystych 18, legalnych 1
- dla $n = 28$ czystych 19, legalnych 1
- dla $n = 30$ czystych 18, legalnych 0
- dla $n = 32$ czystych 24, legalnych 0
- dla $n = 34$ czystych 24, legalnych 0
- dla $n = 36$ czystych 25, legalnych 0
- dla $n = 38$ czystych 25, legalnych 0
- dla $n = 40$ czystych 27, legalnych 1
- dla $n = 42$ czystych 27, legalnych 0
- dla $n = 44$ czystych 30, legalnych 1
- dla $n = 46$ czystych 30, legalnych 0
- dla $n = 48$ czystych 31, legalnych 1
- dla $n = 50$ czystych 34, legalnych 0
- dla $n = 52$ czystych 34, legalnych 1
- dla $n = 54$ czystych 36, legalnych 0
- dla $n = 56$ czystych 34, legalnych 1
- dla $n = 58$ czystych 40, legalnych 0
- dla $n = 60$ czystych 39, legalnych 0
- ...
- dla $n = 100$ czystych 66, legalnych 1
- dla $n = 200$ czystych 138, legalnych 0
- dla $n = 500$ czystych 350, legalnych 1
- dla $n = 1000$ czystych 722, legalnych 0

Ilość czystych liczb wydaje się więc rosnąć (choć nie jest to ściśle monotoniczne co nawet powyższy fragment pokazuje dla $n = 56$ i $n = 30$) i być dość znaczna (przekraczając $\frac{n}{2}$).

Liczby legalne są w porównaniu z nimi nieliczne — dość regularnie trafia się jedna, z rzadka więcej (w zakresie do 1000 sytuacje, gdy dwie rózne sumy są legalne mamy tylko dla 2, 146, 566, 762, 986, przypadków by były trzy lub więcej nie ma w ogóle) i dla rozwiązania (poza $n = 2$) tak naprawdę nieistotne.

Na stosunkowo dużą ilość czystych liczb wpływają nie tylko kolizje ale też fakt, że nie wszystkie dzielniki są wykorzystywane. Przykładowo, dla $n = 10$ przydział dzielników ($[11, 21]$) do sum wygląda następująco

- $165 \to \{11, 15\}$ (11 legalny)
- $164 \to \{\}$
- $163 \to \{\}$
- $162 \to \{18\}$
- $161 \to \{\}$
- $160 \to \{16, 20\}$ (16 legalny)
- $159 \to \{\}$
- $158 \to \{\}$
- $157 \to \{\}$
- $156 \to \{12, 13\}$
- $155 \to \{\}$

i jak widać liczby $14, 17, 19, 21$ nie pojawiają się w ogóle a ponadto mamy trzy kolizje (z których $11 \cdot 15$ jest tą, w oparciu o którą dowiedliśmy (a)).

Dla większych liczb trafiają się także kolizje więcejkrotne, np. dla $n = 20$ mamy $630 = 21 \cdot 30 \cdot 35$.

Schemat użyty w punkcie (b) można łatwo rozwinąć do dowodu, że ilość czystych liczb rośnie do nieskończoności wraz z wzrostem n: można analizować liczby $(n+5)\frac{3(n-4)}{2}, (n+7)\frac{3(n-6)}{2}, (n+9)\frac{3(n-8)}{2} \ldots$. Ich mieszczenie się w przedziale $[n+1, 2n+1]$ będą spełnione od pewnego miejsca (tu: $n \geqslant 30, n \geqslant 63, n \geqslant 108, \ldots$), podobnie warunek by pierwsza była mniejsza od drugiej (tu: $n \geqslant 22, n \geqslant 32, n \geqslant 42, \ldots$).

Powyższe jest jednak bardzo *powolne* w porównaniu z faktycznym tempem wzrostu.

Dużo lepsze ale nieelementarne oszacowanie daje znany wzór na ilość liczb pierwszych w przedziale ($\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ gdzie x jest szerokością przedziału) — liczby pierwsze są oczywiście czyste. Nawet to jednak można poprawiać dalej, np. liczbami *mała* $\cdot$ *duża* (takimi jak $2 \cdot 13$).

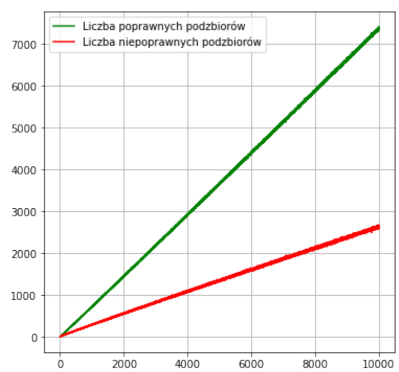
Klub 44 M Δ^{12}_{23} – Obserwacje związane z zadaniem 871

Bartek Knapik

Postanowiłem podzielić się paroma spostrzezeniami dotyczącymi tego zadania. Oto˙one.

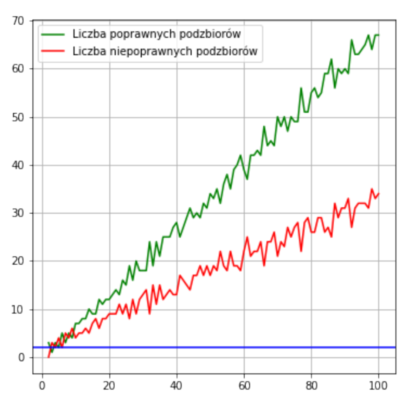
Po pierwsze porzuciłem założenie, że liczba n ma być parzysta, a jedynie większa od 1. Zauważmy, że dla dowolnego n przedział $P_n = [n+1, 2n+1]$ zawiera $n+1$ elementów. Zatem pytając o zbiór n-elementowy zawierający się w przedziale P_n możemy równoważnie pytać o jeden z elementów, który po usunięciu z przedziału P_n da nam rozważany zbiór n-elementowy.

Dla $2 \leq n \leq 10000$ wyliczyłem (przy użyciu prostego skryptu w języku Python) ile istnieje liczb z przedziału P_n które po usunięciu dają zbiór M spełniający i nie spełniający warunki zadania. Daje to następujący wykres:



Jest to dość interesujące, że liczba pozdbiorów jest proporcjonalna do rozmiaru przedziału (a zatem większa od 2. Wydaje się, że około 73% pozbiorów spełnia warunek, że suma jego elementów nie dzieli się przez żaden z elementów.

Dodatkowo spójrzmy na ten wykres dla liczb z zakresu $2 \leq n \leq 100$:



Na tym wykresie widać, że dla $n = 3$ nie da się wybrać dwóch podzbiorów, ale dla każdej większej liczby jest już to możliwe.

Spójrzmy na ten problem z jeszcze innej strony. Ustalmy $n \geq 2$. Niech $M_m = P_n \setminus \{m\}$, a suma wszystkich liczb zbioru M_m oznaczona będzie przez $S(m)$.

Nietrudno zauważyć, że

$$S(m) = \Big(\sum_{i=n+1}^{2n+1} i\Big) - m = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} - m,$$

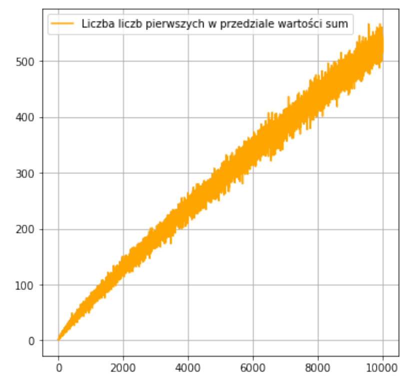
i ponieważ m przyjmuje wartości z przedziału P_n, to $S(m)$ przyjmuje wszystkie wartości z przedziału

$$R_n = \Big[\frac{(n+1)(3n+2)}{2} - 2n - 1, \frac{(n+1)(3n+2)}{2} - n - 1\Big] = \Big[\frac{3n^2+n}{2}, \frac{3n^2+3n}{2}\Big].$$

Zauważmy, że jeżeli dla jakiegoś $m \in P_n$ wartość $S(m)$ jest liczbą pierwszą, to nie dzieli się przez żaden element zbioru M_m, a zatem zbiór M_m spełnia warunki podane w zadaniu.

Sprawdźmy zatem, ile liczb pierwszych zawiera przedział R_n dla każdego $n \geq 2$.

Dla $n = 2, 3, 4$ przedział R_n zawiera tylko jedną liczbę pierwszą (odpowiednio $7, 17, 29$). Dla $5 \leq n \leq 10000$ jest już tych liczb co najmniej 2, co widać na poniższym wykresie:



Dodatkowo, warto zauważyć, że to podejście jest w pewien sposób związane z hipotezą Legendre'a, wedle której pomiędzy kolejnymi kwadratami liczb naturalnych istnieje co najmniej jedna liczba pierwsza.

Janusz Olszewski

Zadanie nr 878 (*Delta* nr 3 (598) 2024)
Znaleźć liczbę naturalną $r > 2$, dla której istnieje nieskończenie wiele r-elementowych zbiorów różnych liczb pierwszych $\{p_1, \ldots, p_r\}$ takich, że każda z liczb $2^{p_i-1} - 1$ $(i = 1, \ldots, r)$ jest podzielna przez iloczyn $p_1 \ldots p_r$. Im większa liczba r, tym cenniejsze rozwiązanie.

Zadanie 878 zaproponował pan Piotr Kumor z Olsztyna w nawiązaniu do zadania 678 (naszej ligi: Δ^7_{14}; omówienie: Δ^2_{15}), a także do zadania 8 z obozu OM (Zwardoń 2010) `om.sem.edu.pl`, zakładka Obóz naukowy.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że teza zadania zachodzi dla $r = 3$. Zaczniemy od przypomnienia kilku faktów.

Lemat 1

Liczby Fermata $F_i = 2^{2^i} + 1$ są dla $i = 0, 1, \ldots, m$ parami względnie pierwsze.

Dowód lematu 1. Załóżmy, że

$$q \mid F_n \quad \text{i} \quad q \mid F_m, \quad \text{gdzie } n < m.$$

Zauważmy, że

$$F_m - 2 = (2^{2^m} + 1) - 2 = 2^{2^m} - 1 = F_0 \ldots F_{m-1}.$$

Stąd łatwo uzyskujemy, że $q|2$. Jednak liczba q jest nieparzysta (bo liczby Fermata są nieparzyste). Zatem $q = 1$. ■

Lemat 2

Jeżeli dla pewnego $n \geqslant 1$ liczba $2^n + 1$ dzieli $F_m = 2^{2^m} + 1$, to $n = 2^m$.

Dowód lematu 2. Załóżmy, że $2^n + 1 \mid F_m$ dla pewnego $n < 2^m$. Wówczas $n = s \cdot 2^t$ dla pewnego nieparzystego $s \geqslant 1$ oraz $0 \leqslant t < m$. Niech $a = 2^{2^t}$. Z równości

$$2^n + 1 = a^s + 1 = (a + 1)(a^{s-1} - a^{s-2} + \cdots - a + 1)$$

i naszej podzielności wynika, że $F_t = 2^{2^t} + 1 = a + 1 \mid 2^n + 1 \mid 2^{2^m} + 1 = F_m$. Jednak, zgodnie z lematem 1, liczby $F_0, F_1, \ldots, F_m$ są parami względnie pierwsze, dlatego powyższa podzielność nie może zachodzić. Sprzeczność oznacza, że $n = 2^m$. ■

Lemat 3

Jeżeli $m \geqslant 2$ oraz p jest dzielnikiem pierwszym liczby Fermata $F_m = 2^{2^m} + 1$, to $p = k2^{m+2} + 1$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 3$.

Dowód lematu 3 w wersji $k \geqslant 1$ można znaleźć w książce W. Sierpińskiego *Teoria liczb II*, str. 388, a także w cytowanym sprawozdaniu z obozu OM - Zwardoń 2010 zad 8. Aby otrzymać warunek $k \geqslant 3$ w lemacie 3 wystarczy zastosować lemat 2 by stwierdzić, że $k \neq 1, 2$. *Dodatkowo można stwierdzić, że* $k \neq 2^i$ *dla* $i = 0, 1, 2, 4, \ldots, 2^{2^m - m - 3}$.

Twierdzenie Zsigmondy'ego.

Jeżeli a i b $(a > b)$ są względnie pierwszymi liczbami naturalnymi oraz $n \geqslant 2$, to istnieje dzielnik pierwszy liczby $a^n - b^n$, który nie jest dzielnikiem pierwszym żadnej z liczb $a^i - b^i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$, za wyjątkiem przypadków, gdy

i) $n = 6, a = 2, b = 1$ tj. $2^6 - 1^6$,

ii) $n = 2$ i $a + b$ jest potęgą liczby 2.

Elementarny dowód twierdzenia Zsigmondy'ego można znaleźć w pracy Andrzeja Rotkiewicza *„Elementarny dowód istnienia dzielnika pierwszego pierwotnego liczby* $a^n - b^n$, Prace Matematyczne tom IV (1960) str. 21-28.

Powróćmy do naszego zadania i konstrukcji przykładu dla $r = 3$.

Niech p będzie dzielnikiem pierwszym liczby $F_n = 2^{2^n} + 1$, gdzie $n \geqslant 3$. Z *lematu 3* wynika, że $p = k2^{n+2} + 1$, gdzie $k \geqslant 3$. Rozważmy liczby

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad A = 2^{k2^{n+1}} - 1 \quad \text{i} \quad B = 2^{k2^{n+2}} - 1.$$

Liczba F_n jest podzielna przez p. Z twierdzenia Zsigmondy'ego wynika, że każda z liczb A i B ma odpowiednio dzielnik pierwszy q i s, który jest odpowiednio *dzielnikiem pierwszym pierwotnym* A i B. *[Mówimy, że liczba pierwsza* t *jest dzielnikiem pierwszym pierwotnym liczby* $a^\delta - b^\delta$, *jeżeli* $t \mid a^\delta - b^\delta$ *oraz* $t \nmid a^i - b^i$ *dla każdego* $0 < i < \delta$. *]*

Ponieważ liczby pierwsze q i s są dzielnikami pierwszymi pierwotnymi liczb A i B, więc $d_1 = k2^{n+1}$ oraz $d_2 = 2^{n+2}k$ są najmniejszymi wykładnikami dla których odpowiednio

$$2^{d_1} \equiv 1 \pmod q \quad i \quad 2^{d_2} \equiv 1 \pmod s.$$

Z małego twierdzenia Fermata mamy $q \mid 2^{q-1} - 1$ i $s \mid 2^{s-1} - 1$. Stąd $k2^{n+1} = d_1 \mid q - 1$ i $k2^{n+2} = d_2 \mid s - 1$. Czyli $q = k2^{n+1}m_1 + 1$ i $s = k2^{n+2}m_2 + 1$ dla pewnych liczb naturalnych m_1, m_2. Ponieważ $n \geqslant 3$, więc liczba pierwsza q jest postaci $16m + 1$. Zatem 2 jest resztą kwadratową modulo q czyli $q \mid 2^{(q-1)/2} - 1$. A zatem $k2^{n+1} = d_1 \mid (q-1)/2$. Tym samym $q = k2^{n+2}m_3 + 1$ dla pewnej liczby naturalnej m_3 (tak na marginesie $m_3 = m_1/2$).

Ze sposobu wyboru liczb p, q, s wynika, że są one różne.
Zauważmy, że $2^{n+1} \mid k2^{n+1} \mid k2^{n+2} = p-1$, czyli

$$2^{2^{n+1}} - 1 \mid 2^{k2^{n+1}} - 1 \mid 2^{k2^{n+2}} - 1 = 2^{p-1} - 1.$$

Stąd i z podzielności

$$\begin{array}{rcl} p & \mid & (2^{2^n}+1)(2^{2^n}-1) = 2^{2^{n+1}} - 1 \\ q & \mid & 2^{k2^{n+1}} - 1 \\ s & \mid & 2^{k2^{n+2}} - 1 = 2^{p-1} - 1 \end{array}$$

otrzymujemy

$$pqs \mid 2^{p-1} - 1$$

Ponieważ: $q = m_3k2^{n+2}+1$, $s = m_2k2^{n+2}+1$ oraz $p = k2^{n+2}+1$, więc $p-1 \mid q-1$ i $p-1 \mid s-1$. Stąd $2^{p-1}-1 \mid 2^{q-1}-1$ i $2^{p-1}-1 \mid 2^{s-1}-1$. Zatem ostatecznie

$$pqs \mid 2^{p-1} - 1, \quad pqs \mid 2^{q-1} - 1, \quad pqs \mid 2^{s-1} - 1.$$

Michał Adamaszek, Kopenhaga, Klub 44M, III 2024

Zadanie 878.

Bezkwadratową nieparzystą liczbę naturalną $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ ($p_i \geq 3$ — pierwsze) nazywa się *Super-Poulet number* jeżeli dla każdego $d|n$ zachodzi $d|2^d - 2$.

Jeżeli $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ jest super-Poulet to w szczególności dla każdych $i \neq j$:

$$p_i \mid p_i p_j \mid 2^{p_i p_j} - 2 = (2^{p_i})^{p_j} - 2 \equiv 2^{p_j} - 2 \pmod{p_i},$$

a zatem $p_i|2^{p_j} - 2$. Z drugiej strony, jeżeli nieparzyste liczby pierwsze $p_1, \ldots, p_r$ spełniają $p_i|2^{p_j} - 2$, czyli $2^{p_j} \equiv 2 \pmod{p_i}$, dla każdych i, j, to

$$2^{p_{j_1} \cdot \ldots \cdot p_{j_s}} = (\cdots((2^{p_{j_1}})^{p_{j_2}}) \cdots)^{p_{j_s}} \equiv 2 \pmod{p_i}$$

dla każdego wyboru indeksów, w szczególności

$$p_{j_1} \cdot \ldots \cdot p_{j_s} \mid 2^{p_{j_1} \cdot \ldots \cdot p_{j_s}} - 2$$

a więc $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ jest super-Poulet.

Reasumując, treść zadania można przeformułować następująco: dla jak największego r udowodnij istnienie nieskończenie wielu liczb super-Poulet o co najmniej r czynnikach pierwszych. O ile udało mi się zorientować, wiadomo o nich nie aż tak dużo. Wikipedia podaje pojedyncze przykłady liczb super-Poulet o 7 czynnikach pierwszych. Korzystając z własności liczb Fermata $F_n = 2^{2^n} + 1$ jak w zadaniu ze Zwardonia, można łatwo osiągnąć $r = 4$, co zrobimy poniżej. Jest to tylko drobna wariacja lematu, który można też znaleźć w literaturze, że iloczyn $F_n F_{n+1}$ jest super-Poulet.

Tyle dywagacji, przechodzimy do właściwego rozwiązania. Dla liczby pierwszej p niech $o_p(2)$ oznacza multiplikatywny rząd 2 modulo p. Chcemy znaleźć nieskończenie wiele czwórek (p_1, p_2, p_3, p_4) dla których $o_{p_i}(2)|p_j - 1$ dla $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Skorzystamy z następujących znanych własności liczb Fermata (które są też pośrednio wykazane w rozwiązaniu zadania ze Zwardonia): Jeżeli p jest liczbą pierwszą i $p|F_n$ to:

(i) $2^{n+2}|p - 1$,
(ii) $o_p(2) = 2^{n+1}$.

Ponadto:

(iii) Różne liczby Fermata są względnie pierwsze. Faktycznie, jeśli $p|F_n$ i $p|F_m$ to na mocy (ii) $2^{n+1} = o_p(2) = 2^{m+1}$ więc $n = m$.
(iv) Liczba Fermata nie jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku ≥ 2. Faktycznie, jeśli $2^{2^n} + 1 = F_n = p^k$ to k jest nieparzyste i $2^{2^n} = (p-1)(p^{k-1} + \ldots + 1)$, co jest niemożliwe, bo suma nieparzyście wielu liczb $p^{k-1} + \ldots + 1$ jest nieparzysta i większa od 1.

Mamy teraz następujące obserwacje.

(a) Jeżeli p, q, liczby pierwsze, dzielą F_n to $o_p(2)|q-1$. Faktycznie, $o_p(2) = 2^{n+1}|2^{n+2}|q-1$.
(b) Jeżeli p, q, liczby pierwsze, spełniają $p|F_n$ i $q|F_{n+1}$ to $o_p(2)|q-1$ i $o_q(2)|p-1$. Faktycznie, $o_p(2) = 2^{n+1}|2^{n+3}|q-1$ oraz $o_q(2) = 2^{n+2}|p-1$.
(c) Jeżeli $n, m \geq 2024$, $|n - m| \leq 878$ oraz $p = F_n$ oraz $q = F_m$ są liczbami pierwszymi to $o_p(2)|q-1$ i $o_q(2)|p-1$. Faktycznie, $o_p(2) = 2^{n+1}|2^{2^m} = q-1$ (ponieważ $n+1 \leq m + 879 < 2^m$), i tak samo w drugą stronę.

Dla każdego $n \geq 2024$ rozważmy teraz osiem kolejnych liczb Fermata $F_n, \ldots, F_{n+7}$. Jeżeli są wśród nich cztery liczby pierwsze p_1, p_2, p_3, p_4, to spełniają one parami warunek $o_{p_i}(2)|p_j - 1$ na mocy (c). W przeciwnym razie co najmniej pięć z ośmiu liczb jest złożonych, a więc znajdziemy dwie kolejne liczby złożone F_m, F_{m+1}, $n \leq m \leq n + 6$. Każda z nich ma co najmniej dwa różne dzielniki pierwsze na mocy (iv). Otrzymujemy stąd cztery parami różne liczby pierwsze p_1, p_2, p_3, p_4 takie, że $p_1, p_2|F_m$ i $p_3, p_4|F_{m+1}$ ("parami różne" ze względu na (iii)). Te liczby p_i spełniają warunki $o_{p_i}(2)|p_j - 1$ na mocy odpowiednio (a) i (b). Biorąc coraz większe n i korzystają znowu z (iii) otrzymujemy nieskończenie wiele różnych czwórek (p_1, p_2, p_3, p_4) co kończy dowód i rozwiązanie zadania z $r = 4$.

Uwaga. "Najgorszy przypadek" dla tego dowodu to sytuacja, w której od pewnego miejsca wszystkie liczby Fermata mają dokładnie dwa różne czynniki pierwsze, a do tego wszystkie odpowiadające im wykładniki w (i) są równe dokładnie $n + 2$ i ani ciut większe. Taki pech prawie na pewno nie ma miejsca, a wtedy dokładniejszą analizą można ugrać nieco większe r.

Piotr Kumor

Liczby Mersenne'a i super – Poulet.

Celem tej notatki jest dowód Twierdzeń 1 i 2
Nazwy użyte w tytule są wyjaśnione poniżej / Definicje /

Literatura

[S] Wacław Sierpiński ,,Teoria Liczb II '' PWN Warszawa 1959

Lemat 1

Jeżeli p jest liczbą pierwszą p , to każdy dzielnik d liczby $2^p - 1$ jest postaci $p \cdot k + 1$.

Jest to fakt dobrze znany, łatwo znaleźć jego dowody.
Oto szkic dowodu : Jeżeli dzielnik d jest liczbą pierwszą,
to prawie natychmiastowa konsekwencja małego twierdzenia Fermata.
Ponieważ iloczyn liczb postaci $p \cdot k + 1$ też jest tej postaci,
więc jest to prawda dla wszystkich dzielników d liczby $2^p - 1$.

Lemat 2

Dla każdej liczby L istnieją dwie różne liczby pierwsze p , q obie większe od L takie, że każda z liczb $2^{p-1} - 1$ oraz $2^{q-1} - 1$ dzieli się przez iloczyn pq .

Dowód znajduje się w **[S]** na stronie 183 (jako Lemat 6).
Można go też znaleźć w wielu innych miejscach,
a na pewno był on znany już w XIX wieku.

Lemat 3

Załóżmy, że dwie różne liczby pierwsze p , q spełniają warunki 1) i 2) :

1) Liczby $2^p - 1$ i $2^q - 1$ są pierwsze.

2) Każda z liczb $2^{p-1} - 1$ oraz $2^{q-1} - 1$ dzieli się przez iloczyn pq .

Wtedy każdy dzielnik d liczby $2^{pq} - 1$ jest postaci $pq \cdot k + 1$.

Dowód Lematu 3 znajduje się w osobnym pliku

[Ten dowód to firmowe rozwiązanie (Delta 1/2024) zadania 866 (przyp.red.).]

Twierdzenie 1

Istnieje nieskończenie wiele liczb złożonych postaci $2^n - 1$
o własności : każdy dzielnik d liczby $2^n - 1$ jest postaci $n \cdot k + 1$.

Dowód

Ustalmy dowolnie liczbę L .
Na podstawie **Lematu 2** istnieją dwie różne liczby pierwsze p , q
obie większe od L takie, że każda z liczb $2^{p-1} - 1$ oraz $2^{q-1} - 1$
dzieli się przez iloczyn pq .

Jeżeli choć jedna z liczb $2^p - 1$ lub $2^q - 1$ jest liczbą złożoną,
to przyjmujemy $n = p$ lub $n = q$ (tak, że $2^n - 1$ to liczba złożona).

Na podstawie **Lematu 1** każdy dzielnik d liczby $2^n - 1$
jest postaci $n \cdot k + 1$, mamy też $n > L$.

Jeżeli zaś obie liczby $2^p - 1$ oraz $2^q - 1$ są pierwsze,
to są spełnione założenia **Lematu 3**,
na podstawie którego można przyjąć $n = pq$.

Każdy dzielnik d liczby $2^{pq} - 1$ jest postaci $pq \cdot k + 1$,
oczywiście $pq > L$, a liczba $2^{pq} - 1$ z pewnością jest liczbą złożoną
(podzielną przez liczby $2^p - 1$ oraz $2^q - 1$).

Twierdzenie 1 zostało udowodnione

Twierdzenie 2

Istnieje nieskończenie wiele liczb złożonych postaci $2^n - 1$
których każdy dzielnik d jest także dzielnikiem liczby $2^{d-1} - 1$.

Dowód

Twierdzenie 2 wynika łatwo z Twierdzenia 1.

Każda bowiem liczba złożona postaci $2^n - 1$ spełniająca
tezę pierwszego, spełnia też tezę drugiego twierdzenia.

Każdy dzielnik d liczby $2^n - 1$ jest postaci $n \cdot k + 1$,
skąd natychmiast wynika, że liczba $2^{d-1} - 1$ dzieli się przez $2^n - 1$,
więc (tym bardziej) liczba $2^{d-1} - 1$ dzieli się przez d.

Twierdzenie 2 zostało udowodnione

Definicje

Liczby postaci $M_n = 2^n - 1$ (gdzie wykładnik n jest liczbą naturalną, niekoniecznie pierwszą) są nazywane liczbami Mersenne'a
http://oeis.org/A000225 i mają bardzo bogatą literaturę.
Nazwa **liczby Mersenne' a** jest powszechnie znana i używana.

Natomiast mniej znana jest inna klasa liczb naturalnych.
Chodzi o tak zwane **liczby super – Poulet :**
Są to (definicja) takie liczby złożone s, których każdy dzielnik d
jest także dzielnikiem liczby $2^d - 2$.

https://en.wikipedia.org/wiki/Super-Poulet_number

https://oeis.org/A050217

Oczywiście jeżeli s jest liczbą nieparzystą
(więc wszystkie dzielniki d liczby s również),
to podzielność liczby $2^d - 2$ przez d jest równoważna
z podzielnością liczby $2^{d-1} - 1$ przez d.
Okazuje się zresztą, że nie istnieją parzyste liczby super – Poulet
(**[S]** strona 186), ale to nie jest dla nas istotne.

Janusz Olszewski

Zadanie nr 880 (*Delta* nr 4 (599) 2024)
Rozstrzygnąć, czy zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych $\mathbb{Q}^+$ daje się przedstawić w postaci sumy dwóch zbiorów rozłącznych A, B tak, by miały miejsce następujące implikacje (dla $x, y \in \mathbb{Q}^+$):

- jeśli $xy = 1$, to $x \in A$, $y \in A$ lub $x \in B$, $y \in B$;
- jeśli $|x - y| = 1$, to $x \in A$, $y \in B$ lub $x \in B$, $y \in A$.

Zadanie 880 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

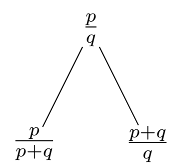
Rozwiązanie

Odpowiedź jest twierdząca.

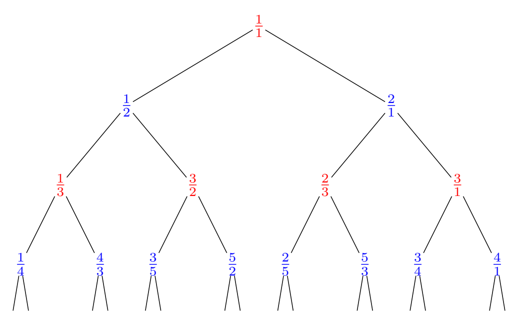
Z warunków zadania wynika, że jeśli dodatnia liczba wymierna $\frac{p}{q}$ należy do zbioru A, to także $\frac{q}{p} \in A$, zaś liczby $\frac{p}{p+q}$ i $\frac{p+q}{q}$ należą do zbioru B.
Rozważmy drzewo binarne zbudowane w następujący sposób:

1) liczba $1 = \frac{1}{1}$ jest na szczycie drzewa.

2) z każdego wierzchołka w którym wpisana jest liczba $\frac{p}{q}$ (*rodzic*), wychodzą po dwie krawędzie, przy czym w wierzchołku, będącym końcem lewej krawędzi wpisana jest liczba $\frac{p}{p+q}$ (*lewy potomek*), a wierzchołku, będącym końcem lewej krawędzi wpisana jest liczba $\frac{p+q}{q}$ (*prawy potomek*).



Początkowe wartości w tym drzewie przedstawia poniższy schemat.



Rozważmy ciąg zbiorów $(G(n))$ określony warunkami $G(1) = \{1\}$ oraz dla $n \geqslant 2$

$$G(n) = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x = \frac{p}{p+q} \vee x = \frac{p+q}{q} \text{ dla } \frac{p}{q} \in G(n-1)\}.$$

Zbiór $G(n)$ tworzy n-tą *generację* (n-te *pokolenie*). Oznaczmy $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G(i)$.

Przyjmijmy
$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} G(2i-1) \quad \text{oraz} \quad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} G(2i).$$
Sprawdzimy kolejno następujące własności:

(1) Wszystkie ułamki w drzewie są nieskracalne tj. jeśli w drzewie pojawia się $\frac{r}{s}$, wtedy r i s są względnie pierwsze.

Dla wierzchołka na szczycie drzewa tj liczby $\frac{1}{1}$, jest to prawda. Jeśli r i s są względnie pierwsze, to względnie pierwsze są także pary r i $r+s$ oraz s i $r+s$.

(2) W drzewie występują wszystkie dodatnie liczby wymierne tj. $G = \mathbb{Q}^+$

Przypuśćmy, że teza jest fałszywa. Spośród ułamków, które nie pojawiają się w drzewie wybierzmy ułamek $\frac{r}{s}$ o najmniejszej sumie $r+s$. Jeśli $\frac{r}{s} = 1$, to mamy sprzeczność, gdyż ułamek $\frac{1}{1}$ jest w na szczycie drzewa. Jeśli $r > s$, to liczba $\frac{r-s}{s}$ nie pojawia się w drzewie, w przeciwnym razie ułamek $\frac{r}{s}$ byłby jego prawym potomkiem. Jeśli $r < s$, to liczba $\frac{r}{s-r}$ nie pojawia się w drzewie, w przeciwnym razie ułamek $\frac{r}{s}$ byłby jego lewym potomkiem. W obu przypadkach nie pojawia się ułamek, którego suma licznika i mianownika jest mniejsza niż minimalna wartość $r+s$, co daje sprzeczność.

(3) Każdy ułamek dodatni występuje w drzewie dokładnie raz.

Zauważmy, że ułamek $\frac{1}{1}$ nie może pojawić się więcej niż raz, gdyż każdy węzeł drzewa z wyjątkiem wierzchołka ma postać $\frac{i}{i+j} < 1$ lub $\frac{i+j}{j} > 1$.

Przypuśćmy, że w drzewie pewne dwa ułamki pojawiają się więcej niż raz. Spośród tych ułamków wybierzmy ułamek $\frac{r}{s}$ o najmniejszej sumie $r+s$. Jak stwierdziliśmy wyżej $r \neq s$. Jeśli $r > s$, to jego rodzic $\frac{r-s}{s}$ ma sumę licznika i mianownika równą r, a więc mniejszą niż suma $r+s$, co przeczy wyborowi tej sumy. Podobnie jeśli $r < s$, to jego rodzic $\frac{r}{s-r}$ ma sumę licznika i mianownika równą s, mniejszą niż suma $r+s$, co przeczy wyborowi tej sumy.

(4) Ułamki $\frac{p}{q}$ i $\frac{q}{p}$ należą do tej samej generacji tj. $\frac{p}{q}, \frac{q}{p} \in G(n)$.

Niech $\frac{r}{s}$ i $\frac{s}{r}$ będą ułamkami należącymi do różnych generacji o najmniejszej sumie $r+s$. Oczywiście $r \neq s$. Możemy założyć, że $r > s$. Wówczas rodzicami liczb $\frac{r}{s}$ i $\frac{s}{r}$ są odpowiednio liczby $\frac{r-s}{s}$ i $\frac{s}{r-s}$. Ponieważ liczby $\frac{r}{s}$ i $\frac{s}{r}$ należą do różnych generacji, więc ich rodzice także należą do różnych generacji. Jednak suma licznika i mianownika rodziców wynosi r, a więc jest mniejsza niż suma $r+s$, co przeczy wyborowi tej sumy.

(5) Jeżeli $x, y \in \mathbb{Q}^+$ oraz $|x-y| = 1$, to jedna z liczb x, y jest rodzicem, a druga potomkiem.

Jeżeli $x = \frac{r}{s}$, to $y = \frac{r-s}{s}$ lub $y = \frac{r+s}{s}$. Zatem pary (x, y) to $(potomek, rodzic)$ lub $(rodzic, potomek)$

Z własności (3) wynika, że zbiory A i B są rozłączne, a z własności (2) wynika, że $A \cup B = \mathbb{Q}^+$. Własności (4) i (5) dowodzą implikacji opisanych w zadaniu kropkami.

Janusz Olszewski

Zadanie nr 881 (*Delta* nr 5 (600) 2024)
Ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ jest określony wzorami: $a_0 = 3$, $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \prod_{i=0}^{n-1} a_i$$

lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

Komentarz. Przyjrzyjmy się jeszcze przypadkom, gdy $|a| \leqslant 2$. Udowodnimy, że wówczas ciąg (b_n) nie ma granicy.

(1) Jeżeli $|a| = 2$, to nasz ciąg a_n jest stały dla $n \geqslant 1$ tj. $a_n = 2$. Czyli $b_n = a \cdot 2^{n-2} \to \pm\infty$.

(2) Gdy $|a| < 2$.

Ponieważ $|a| < 2$, więc $a = 2\cos\alpha$ dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Korzystając z tożsamości $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ łatwo otrzymujemy przez indukcję[1], że

$$a_n = 2\cos 2^n\alpha. \tag{$**$}$$

Stąd $|a_n| \leqslant 2$.

Jeżeli ciąg (b_n) jest zbieżny, to także ciąg (b_n^2) jest zbieżny. W *sposobie 2* stwierdziliśmy, że o zbieżności ciągu (b_n^2) decyduje zachowanie ciągu (a_n). Z równości

$$b_n^2 = \frac{1}{a^2-4} \cdot \Big(1 - \frac{4}{a_{n+1}+2}\Big)$$

oraz nierówności $|a_n| \leqslant 2$ wynika, że ciąg (b_n^2) jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy $d \in (-2, 2\rangle$.

Zbadajmy zbieżność ciągu (a_n). Jeśli ciąg a_n jest zbieżny do d, to d jest punktem stałym funkcji $f(x) = x^2 - 2$, tj. $f(d) = d$, czyli $d \in \{-1, 2\}$.

Rozważmy dwa przypadki

($2a$) Gdy liczba α jest niewspółmierna z π, tj. $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Oznaczmy $t = \frac{\alpha}{\pi}$. Możemy założyć, że $\alpha \in (0, \pi)$, czyli $t \in (0, 1)$.

Wiadomo[2], że dla liczby niewymiernej $t \in (0, 1)$ zbiór $U = \{x : x = \{nt\}, n \in \mathbb{N}\}$ jest gęsty w przedziale $(0, 1)$, gdzie $\{t\}$ jest częścią ułamkową liczby t.

Funkcja $g : (0, 1) \to (-2, 2)$ określona wzorem $g(\{x\}) = 2\cos(2^{x/t}\alpha)$ jest ciągła i *„na"* oraz przekształca gęsty podzbiór U przedziału $(0, 1)$ *„na"* gęsty podzbiór $V = \{2\cos(2^n\alpha)) : n \in \mathbb{N}\}$ przedziału $(-2, 2)$.

Stąd wynika, że ciąg (a_n) określony wzorem $(**)$ nie ma granicy, gdy α jest niewspółmierne z π, co więcej każdy punkt przedziału $(-2, 2)$ jest granicą pewnego podciągu ciągu (a_n).

($2b$) Gdy liczba α jest współmierna z π, tj. $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbb{Q}$. (Badając ten przypadek nie nie ograniczamy się do przedziału $(0, 1)$ lecz zakładamy, że $\alpha/\pi \in \mathbb{Q}$)

Jeżeli $\alpha/\pi = p/q$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$, to ciąg (a_n) jest okresowy dla dostatecznie dużych n. Zatem, aby ciąg był zbieżny, konieczne i wystarczające jest, aby

[1] krok indykcyjny wygląda tak: $a_{n+1} = a_n^2 - 2 = 2(2\cos^2(2^n\alpha) - 1) = 2\cos(2^{n+1}\alpha)$.

[2] dowód wykorzystuje m.in. zasadę szufladkową Dirichleta i był wielokrotnie podawany na łamach Delty, np Δ^7_{1994} str 5-7 oraz Δ^6_{2001}, Δ^7_{1991}, Δ^3_{2010},

był stały dla dostatecznie dużych n. Ponieważ granicą naszego ciągu mogą być tylko liczby -1 i 2, więc dla dostatecznie dużych n mamy

$$a_n = -1 \ \text{ lub } \ a_n = 2.$$

[Możemy dodatkowo sprawdzić, dla jakich α zachodzą powyższe równości. Mamy bowiem równoważnie:

$$\cos\left(2^n\alpha\right) = -\frac{1}{2} \quad \textit{lub} \quad \cos\left(2^n\alpha\right) = 1.$$

Zatem

$$2^{n-1}\alpha = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \quad \textit{lub} \quad 2^{n-1}\alpha = k\pi,$$

a więc

$$\alpha = \frac{\pm 1 + 3k}{3 \cdot 2^{n-1}}\pi \quad \textit{lub} \quad \alpha = \frac{k}{2^{n-1}}\pi$$

Bez trudu sprawdzamy, że gdy α jest powyższej postaci, wówczas ciąg (a_n) jest zbieżny i stały od pewnego miejsca.]

Wróćmy do badania zbieżności ciągu (b_n). Ciąg ten ma szanse być zbieżny tylko wtedy, gdy ciąg (b_n^2) jest zbieżny, czyli gdy ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy $d \in (-2, 2\rangle$. Z analizy przeprowadzonej w punkcie $(2b)$ wynika, że ciąg (a_n) jest zbieżny do -1 lub 2 oraz jest stały dla $n > k$, tj. $a_n = -1$ dla $n > k$ lub $a_n = 2$ dla $n > k$, gdzie $k + 1$ jest najmniejszym indeksem dla których nasz ciąg jest stały. Zauważmy od razu, że jeśli $a_{k+1} = 2$, to $a_k = -2$ oraz $a_{k-1} = 0$. Tym samym wyraz b_{k-1} ciągu (b_n) jest nieokreślony (dzielenie przez zero w definicji ciągu).

Stąd i z definicji ciągu (b_n) dostajemy dla $n > k$ i $a_n \to -1$ równość

$$b_n = a_0 a_1 \dots a_k \cdot (-1)^{n-k-2}$$

Widzimy jednak, że ciąg ten nie może być zbieżny, gdyż podciągi (b_{2n}) i (b_{2n+1}) są zbieżne do granic o różnych znakach.

Janusz Fiett

Zadanie nr 882 (*Delta* nr 5 (600) 2024)
Na bokach AB, BC, CD, DA równoległoboku $ABCD$ wybrano, odpowiednio, punkty K, L, M, N, różne od wierzchołków. Weźmy pod uwagę trójkąty ANK, BKL, CLM, DMN. Udowodnić, że każda z następujących czwórek punktów stanowi czwórkę wierzchołków pewnego równoległoboku:
(a) ortocentra tych trójkątów;
(b) środki ciężkości tych trójkątów;
(c) środki okręgów opisanych na tych trójkątach.

Zadanie 882 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązanie zadania 882

Będę oznaczał przez A', B', C' i D' punkty charakterystyczne (w zależności od wariantu - ortocentra, środki ciężkości lub środki okręgów opisanych), odpowiednio, trójkątów ANK, BKL, CLM, DMN.

Dowód można przeprowadzić w oparciu o obserwację prostego **faktu**. Rozważmy dwie pary prostych równoległych, przecinające się. Weźmy dowolne dwa spośród czterech punktów, w których te proste się przecinają. Dokonajmy dowolnego przesunięcia równoległego jednej z par prostych. Odcinek łączący odpowiednie dwa punkty przecięcia prostych będzie miał, po operacji przesunięcia, tę sama miarę i orientację, co odcinek przed tą operacją. Fakt ten dotyczy również sytuacji, w której jedna z par prostych jest zdegenerowana (proste pokrywają się).

Przyjmijmy teraz, że punkty K, L, M, N są środkami odpowiednich boków równoległoboku ABCD. W takiej sytuacji cały rozważany układ jest środkowosymetryczny, a więc każda z rozważanych czwórek punktów A', B', C' i D' również wykazuje symetrię środkową, czyli stanowi wierzchołki równoległoboku.

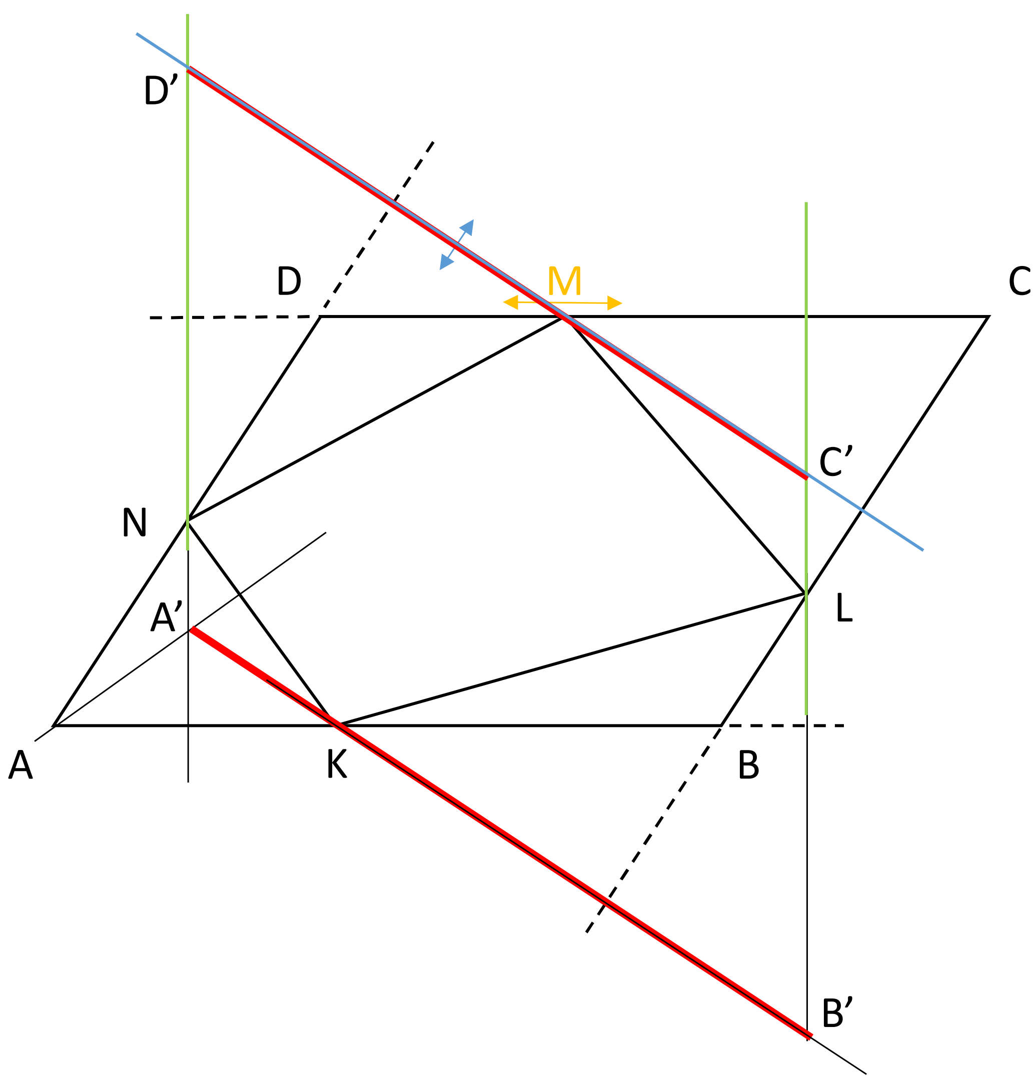
Wystarczy udowodnić, że jeśli dla pewnego położenia punktów K, L, M, N spełnione są postawione w zadaniu warunki, dotyczące czwórek punktów A', B', C' i D', to pozostają one spełnione przy zmianie położenia jednego z punktów K, L, M, N. Jeśli to prawda, to startując od układu, w którym punkty K, L, M, N są środkami boków, możemy kolejno przesunąć w dowolny sposób każdy z nich, a rozważane czwórki punktów A', B', C' i D' pozostaną wierzchołkami równoległoboku.

Bez utraty ogólności wybieram do rozważań punkt M. Pokażę, że dla każdego z przypadków - ortocentrów, środków ciężkości i środków okręgów opisanych odpowiednich trójkątów - można wskazać po dwie pary prostych równoległych, których odpowiednie przecięcia stanowią punkty C' i D'. Jedna z par prostych ulega przesunięciu równoległemu wraz z ruchem punktu M po odcinku CD, druga pozostaje nieruchoma. Na mocy **faktu** omawianego na wstępie, będzie to oznaczać, że odcinek C'D' zachowuje miarę i orientację, a więc pozostaje równy i równoległy do odcinka A'B', na którego ruch punkt M nie ma wpływu, w związku z czym punkty A',B', C' i D' są wierzchołkami równoległoboku.

Każdy z przypadków przedstawię na ilustracji, zachowując stałą konwencję użycia kolorów. Cienkie czarne linie to proste, zawierające odpowiednio wysokości, środkowe lub symetralne boków trójkątów ANK i BKL (w przypadku środkowych, również trójkątów CLM, DMN). Przecięcia tych prostych wyznaczają punkty A' i B' (ew. również C' i D'). Punkt M przedstawiany jest na pomarańczowo, wraz ze strzałką wskazującą na możliwość zmiany jego pozycji na boku CD równoległoboku. Linie zielone oznaczają proste, których pozycja nie zmienia się wraz z ruchem punktu M, zaś linie niebieskie - takie, które przemieszczają się wraz z ruchem punktu M, co symbolizuje strzałka. Przecięcia zielonych i niebieskich linii wyznaczają położenia punktów C' i D'. Grubymi czerwonymi liniami oznaczone są odcinki A'B' i C'D'.

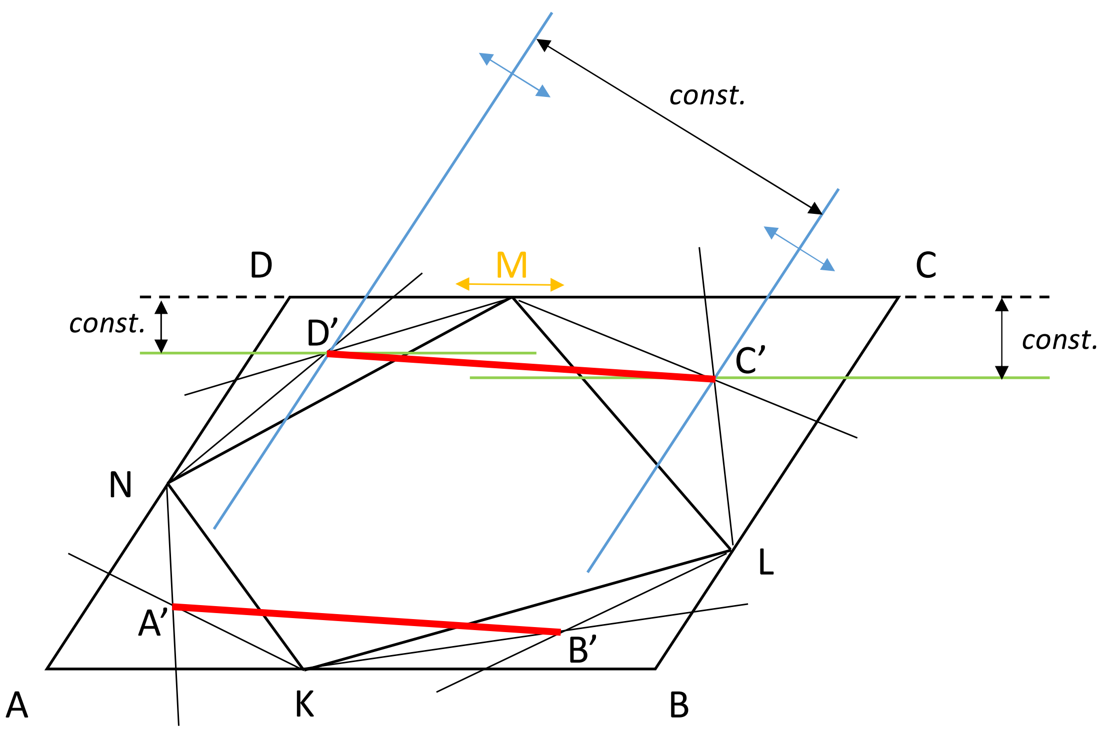
a) Ortocentra trójkątów.

Wysokości trójkątów CLM i DMN opuszczone z punktu M leżą na wspólnej prostej (linia niebieska), poruszającej się wraz ze zmianą pozycji punktu M. Wysokości tych trójkątów, opuszczone z punktów L i N, mają stałe położenie (linie zielone), niezależnie od pozycji punktu M.



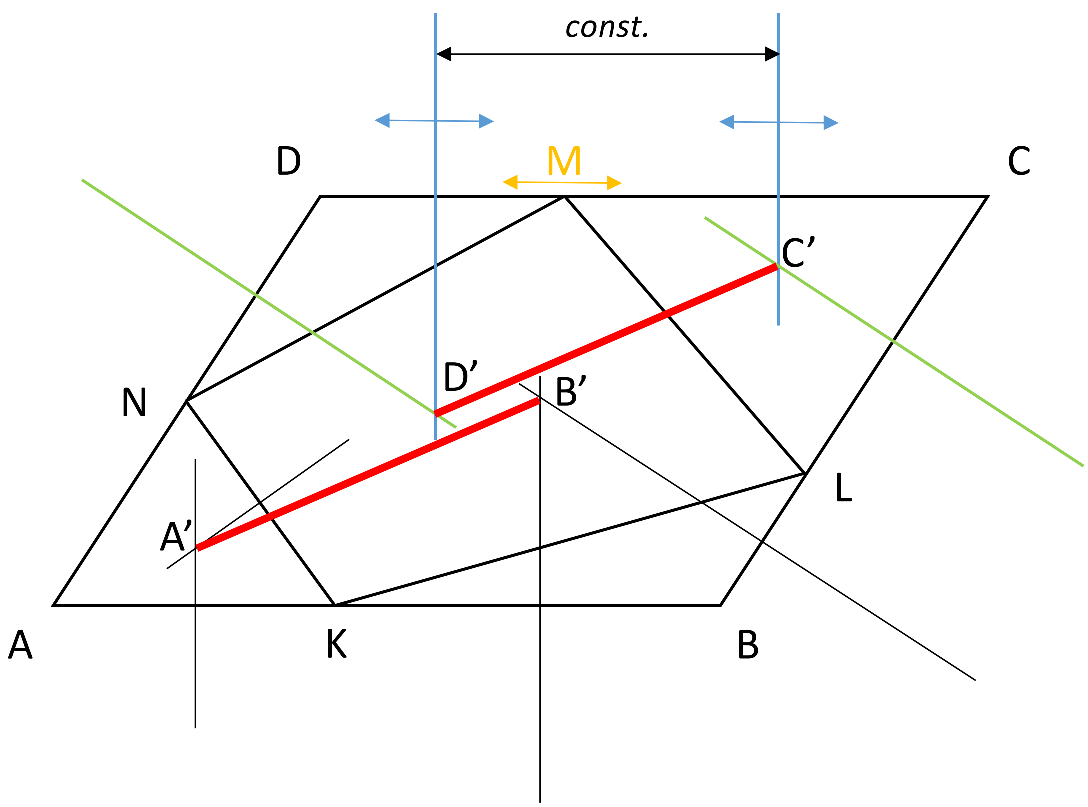
b) Środki ciężkości trójkątów.

Ze względu na przecinanie się środkowych trójkąta w proporcji 1:2, każdy ze środków ciężkości C’ i D’ trójkątów CLM i DMN zachowuje stałą odległość od odpowiedniego boku trójkąta, równą 1/3 wysokości tego trójkąta opuszczonej na ów bok. Linie zielone, równoległe do boku DC, zawierają możliwe położenia środków ciężkości trójkątów CLM i DMN, zaś linie niebieskie zachowują odległość miedzy sobą, równą 2/3 odległości między bokami AD i BC równoległoboku.



c) Środki okręgów opisanych na trójkątach.

Położenie symetralnych CL trójkąta CLM oraz DN trójkąta DMN nie zmienia się (linie zielone), zaś symetralne boków CM trójkąta CLM i DM trójkąta DMN (linie niebieskie), przemieszczają się wraz z ruchem punktu M, jednak są stale odległe od siebie o połowę długości boku CD równoległoboku ABCD.



To kończy dowód.

Janusz Fiett