Załącznik do omówienia ligi matematycznej w roku szkolnym 2022/23

Spis rozwiązań:

- **Zad. 845:**
  - Janusz Olszewski
- **Zad. 849:**
  - Piotr Kumor
- **Zad. 856:**
  - Janusz Olszewski
  - Piotr Kumor
  - Michał Adamaszek
  - Jerzy Cisło
  - Janusz Fiett
- **Zad. 858:**
  - Janusz Olszewski
- **Zad. 863:**
  - Janusz Olszewski
  - Michał Adamaszek

Janusz Olszewski

Zadanie nr 845 (*Delta* nr 9 (578) 2022)
Udowodnić nierówność dla liczb nieujemnych $x_1, \ldots, x_n$ oraz $y_1, \ldots, y_n$:

$$\Big(\sum_{i\neq j} x_i y_j\Big)^2 \geqslant \Big(\sum_{i\neq j} x_i x_j\Big)\Big(\sum_{i\neq j} y_i y_j\Big)$$

(każda z trzech napisanych sum ma $n(n-1)$ składników odpowiadających wszystkim uporządkowanym parom (i, j) różnych numerów $i, j \in \{1, \ldots, n\}$).

Rozwiązanie

Jeżeli wszystkie liczby x_i lub wszystkie liczby y_i są zerami, to nierówność z zadania jest równością - po lewej i prawej stronie są zera. Załóżmy więc że istnieją liczby niezerowe wśród $x_1, \ldots, x_n$ oraz wśród $y_1, \ldots, y_n$. Wówczas $\sum_{i=1}^n x_i > 0$, $\sum_{i=1}^n y_i > 0$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, $\sum_{i=1}^n y_i^2 > 0$.

Sposób 1 został pominięty w tym załączniku (przyp. red.)

Sposób 2 (średnia arytmetyczna i geometryczna dwóch liczb)
Bez szkody dla ogólności możemy założyć[1], że $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 1$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\sum_{i\neq j} x_i y_j &= \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i\Big) - \sum_{i=1}^n x_i y_i = 1 - \sum_{i=1}^n x_i y_i \\
\sum_{i\neq j} x_i x_j &= \Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \\
\sum_{i\neq j} y_i y_j &= \Big(\sum_{i=1}^n y_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2
\end{aligned}$$

Oczywistą nierówność

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2\sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \geqslant 0$$

przepisujemy w postaci

$$2 - 2\sum_{i=1}^n x_i y_i \geqslant 1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 + 1 - \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

lub równoważnie

$$2\sum_{i\neq j} x_i y_j \geqslant \sum_{i\neq j} x_i x_j + \sum_{i\neq j} y_i y_j \tag{1}$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną liczb $\sum_{i\neq j} x_i x_j$ i $\sum_{i\neq j} y_i y_j$ otrzymujemy

$$\sum_{i\neq j} x_i x_j + \sum_{i\neq j} y_i y_j \geqslant 2\sqrt{\Big(\sum_{i\neq j} x_i x_j\Big)\Big(\sum_{i\neq j} y_i y_j\Big)} \tag{2}$$

Połączenie nierówności (1) i (2) daje tezę zadania.

---

[1] wystarczy podzielić obie strony nierówności z zadania przez liczbę dodatnią $(\sum_{i=1}^n x_i)^2(\sum_{i=1}^n y_i)^2$

Sposób 3 (nierówność Aczéla)
Zachodzi następujące twierdzenie udowodnione przez Jánosa Aczéla w 1956 r.:

Twierdzenie (nierówność Aczéla)

Jeżeli $a, a_1, \dots, a_n$ i $b, b_1, \dots, b_n$ są liczbami rzeczywistymi, przy czym $b^2 - b_1^2 - \dots - b_n^2 > 0$, to

$$(a^2 - a_1^2 - \dots - a_n^2)(b^2 - b_1^2 - \dots - b_n^2) \leqslant (ab - a_1 b_1 - \dots - a_n b_n)^2.$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi $(a, a_1, \dots, a_n)$ i $(b, b_1, \dots, b_n)$ są proporcjonalne tj. $pa = qb$, $pa_i = qb_i$.

Dowód można znaleźć w klasycznym podręczniku Dragoslava S. Mitrinovića *Elementarne nierówności*, Warszawa 1972, PWN, str. 38.

Przyjmijmy w powyższym twierdzeniu wartości z zadania: $a_i = x_i$, $b_i = y_i$, $a = \sum_{i=1}^n x_i$ i $b = \sum_{i=1}^n y_i$.
Jeżeli $\sum_{i \neq j} y_i y_j = 0$, to teza zadania jest prawdziwa, gdyż prawa strona strona nierówności z zadania jest zerem zaś lewa jest nieujemna. Załóżmy wiec, że $\sum_{i \neq j} y_i y_j > 0$. Wówczas spełnione są założenia nierówności Aczéla, gdyż

$$b^2 = \Big(\sum_{i=1}^n y_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 + \underbrace{\sum_{i \neq j} y_i y_j}_{>0} > \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} a^2 - \sum_{i=1} x_i^2 &= \sum_{i \neq j} x_i x_j, \\ b^2 - \sum_{i=1} y_i^2 &= \sum_{i \neq j} y_i y_j, \\ ab - \sum_{i=1} x_i y_i &= \sum_{i \neq j} x_i y_j, \end{aligned}$$

więc nierówność Aczéla przybiera postać nierówności z zadania:

$$\Big(\sum_{i \neq j} x_i x_j\Big)\Big(\sum_{i \neq j} y_i y_j\Big) \leqslant \Big(\sum_{i \neq j} x_i y_j\Big)^2.$$

Sposób 3a (trójmian kwadratowy -metoda zaczerpnięta z dowodu nierówności Aczéla)
Ze sposobu 3 wynika, że zdanie jest szczególnym przypadkiem nierówności Aczéla. Tak więc metoda dowodu tej nierówności będzie działać także w przypadku nierówności z zadania.

Jeżeli $\sum_{i\neq j} y_i y_j = 0$, to teza zadania jest prawdziwa, gdyż prawa strona strona nierówności z zadania jest zerem zaś lewa jest nieujemna. Załóżmy więc, że $\sum_{i\neq j} y_i y_j > 0$.
Oznaczmy $a = \sum_{i=1}^n x_i$, $b = \sum_{i=1}^n y_i$.
Rozważmy trójmian kwadratowy

$$\begin{aligned} f(x) &= \Big(\sum_{i\neq j} y_i y_j\Big)x^2 - 2\Big(\sum_{i\neq j} x_i y_j\Big)x + \Big(\sum_{i\neq j} x_i x_j\Big) \\ &= \Big(b^2 - \sum_{i=1}^n y_i^2\Big)x^2 + 2\Big(ab - \sum_{i=1}^n x_i y_i\Big)x + \Big(a^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2\Big) \\ &= (bx-a)^2 - \sum_{i=1}^n (y_i x - x_i)^2. \end{aligned}$$

Ponieważ $b > 0$, więc

$$f\Big(\frac{a}{b}\Big) = -\sum_{i=1}^n (y_i x - x_i)^2 \leqslant 0.$$

Jednocześnie

$$b^2 = \Big(\sum_{i=1}^n y_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 + \underbrace{\sum_{i\neq j} y_i y_j}_{>0} > \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

więc współczynnik przy x^2 jest dodatni. Tak więc $f(x) \to +\infty$ dla $x \to +\infty$. Zatem funkcja f ma pierwiastek rzeczywisty. Tym samym wyróżnik tego trójmianu kwadratowego jest nieujemny, tzn

$$\Delta = 4\Big(\sum_{i\neq j} x_i y_j\Big)^2 - 4\Big(\sum_{i\neq j} y_i y_j\Big)\Big(\sum_{i\neq j} x_i x_j\Big) >= 0.$$

Mamy więc tezę zadnia.

Piotr Kumor

849. Rozwiązać równanie (*) $4^x + 4^y + 1 = z^4$
w liczbach całkowitych dodatnich x , y , z .

Rozwiązanie

Prostym rachunkiem sprawdzamy, że trójki liczb (x , y , z) :
(2, 3, 3) oraz (3, 2, 3) spełniają równanie (*)

Są to wszystkie rozwiązania równania (*).

Prawdziwy jest bowiem fakt ogólniejszy :
Jeżeli $q \geq 3$ jest liczbą całkowitą,
to równanie (**) $2^x + 2^y + 1 = z^q$ ma rozwiązanie
w liczbach całkowitych x , y , z ; $x > y \geq 1$
jedynie dla $q = 4$ i jest nim trójka (x , y , z) : (6, 4, 3).
Wynika stąd rozwiązanie równania (*),
które jest oczywiście szczególnym przypadkiem równania (**).

Dowód tego faktu można (pośrednio) znaleźć w Internecie.
Jest to bowiem prosta konsekwencja wyników prac : [S] oraz [BBM].

W pracy [S]

L. Szalay: *The equations* $2^n \pm 2^m \pm 2^l = z^2$, Indag. Math. (N.S.) **13** (2002), 131–142.

jest ona dostępna pod adresem :

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001935770290011X

Udowodniono twierdzenie, które rozstrzyga kwestię
parzystych wykładników q , mianowicie :

Theorem 1. *If the positive integers n, m and x with $n \geq m$ satisfy*

$$(6) \qquad 2^n + 2^m + 1 = x^2,$$

then

(i) $(n,m,x) \in \{(2t, t+1, 2^t+1) \mid t \in \mathbb{N},\ t \geq 1\}$ *or*
(ii) $(n,m,x) \in \{(5,4,7)\ ,\ (9,4,23)\}$.

Liczby 7 i 23 są pierwsze (nie są więc pełnymi potęgami),
zatem z powyższego Twierdzenia wynika natychmiast,
że jeżeli wykładnik $q = 2 \cdot s \geq 4$ jest liczbą parzystą,
i równanie (**) ma rozwiązanie, to musi być też spełnione równanie :
$2^t + 1 = z^s$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich : t, $s \geq 2$, z.
To ostatnie równanie jest spełnione wtedy i tylko wtedy,
gdy $t = 3$, $s = 2$, $z = 3$. Jest to fakt doskonale znany,
i łatwy do udowodnienia (natychmiastowy).
Zatem dla parzystych wykładników q mamy kompletne rozwiązanie
równania (**), a więc także równania (*) czyli zadania 849.

Natomiast dla nieparzystych wykładników $q \geq 3$ równanie (**)
nie posiada rozwiązań, a jest to udowodnione w pracy [BBM].

M.A. Bennett, Y. Bugeaud and M. Mignotte: *Perfect powers with few binary digits and related Diophantine problems, II*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **153** (2012), 525–540.

https://irma.math.unistra.fr/~bugeaud/travaux/BBM-Cambridge.pdf

jako następujące twierdzenie :

THEOREM 1. *If there exist integers $a > b > 0$ and $q \geqslant 2$ for which*

$$x^a + x^b + 1 = y^q, \quad \text{with} \quad x \in \{2,3\},$$

then (x,a,b,y,q) is one of

$$(2,5,4,7,2),\ (2,9,4,23,2),\ (3,7,2,13,3),\ (2,6,4,3,4),\ (4,3,2,9,2),\ \text{or}\ (4,3,2,3,4),$$

or $(x,a,b,y,q) = (2, 2t, t+1, 2^t+1, 2)$, for some integer $t = 2$ or $t \geqslant 4$.

Jak widać, twierdzenie to jest nieco ogólniejsze.
Podane są wszystkie rozwiązania równania (**), a także równania (***)
$3^x + 3^y + 1 = z^q$. (jest tylko jedno rozwiązanie) $3^7 + 3^2 + 1 = 13^3$.

Ponadto, widoczne są też (nieco wbrew założeniom { 2 , 3 })
rozwiązania równania $4^x + 4^y + 1 = z^q$ obejmujące po drodze
także przypadek naszego równania (*) czyli zadania 849.
Jest ono podane trzy razy :
$2^6 + 2^4 + 1 = 3^4$; $4^3 + 4^2 + 1 = 9^2$; $4^3 + 4^2 + 1 = 3^4$

Dowód dla parzystych wykładników q, to po prostu odesłanie
do pracy [S] (cytowanej powyżej).
Dowód, że dla nieparzystych wykładników nie ma rozwiązań,
to cały rozdział 3 pracy [BBM]
(strony 151 – 155 we wskazanym pliku PDF).
Dowód ten jest bardzo trudny, to bardzo zaawansowana teoria liczb.
Nawet nie próbowałem na poważnie go czytać (Piotr Kumor).
Odrobinę lepiej wygląda dowód dla wykładników parzystych,
dokładniej dla kwadratów (praca [S]), jednak on także nie jest łatwy.
Tym bardziej nie jest łatwe pytanie o ogólne rozwiązanie
równania $x^a + x^b + 1 = y^q$ w liczbach całkowitych dodatnich
x, y, $q \geq 2$, $a > b \geq 1$.
Można znaleźć liczne prace na temat tego równania.
Rozstrzygnięto wiele przypadków szczególnych,
ale pełne rozwiązanie wydaje się być odległe.
Dla potwierdzenia zacytujmy ostatnie słowa (str.83 / 84) pracy [BB] :

M.A. Bennett and Y. Bugeaud: *Perfect powers with three digits*, Mathematika **60** (2014), 66–84.

https://personal.math.ubc.ca/~bennett/BeBu-Math-2014.pdf

§7. *Concluding remarks.* The Diophantine equation we have studied in this paper,

$$x^a + x^b + 1 = y^q, \quad a > b > 0,$$

likely has only the solutions

$$(x, a, b, y^q) = (2, 5, 4, 7^2), (2, 9, 4, 23^2), (3, 7, 2, 13^3),$$
$$(18, 2, 1, 7^3), (72, 3, 1, 611^2)$$

or $(2, 2t, t+1, (2^t+1)^2)$, $t \geqslant 2$, in positive integers x, y and $q \geqslant 2$. We are, however, unaware of techniques that would enable one to prove this, without additional assumptions. As a rough indication of the level of difficulty involved, one might observe that for this equation, only with $b = 0$, it is still unknown whether the number of solutions in integers x, y, a, q with $a, q \geqslant 2$ is finite.

Znów, nieco wbrew założeniom (że $a > b > 0$) na końcu wspomniano przypadek $b = 0$, czyli równania $x^a + 2 = y^q$.
Znane jest tylko jedno rozwiązanie $x = 5$, $a = 2$, $y = 3$, $q = 3$
oraz hipoteza, że nie ma innych.
Jeżeli dopuścić także możliwość $a = b \geq 2$,
to mamy do czynienia z równaniem $2x^a + 1 = y^q$ i sytuacją :
$a = b = q = 2$ (równanie Pella $2x^2 + 1 = y^2$, nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x , y)
oraz wyjątkowym równaniem $2 \cdot 11^2 + 1 = 3^5$.

Są to (chyba ?) jedyne znane rozwiązania równania diofantycznego $2x^a + 1 = y^q$, choć nie jestem (Piotr Kumor) do końca tego pewny.

Pewne jest za to, że istnieje rozwiązanie zadania 849
na poziomie matematyki Klubu 44 M.
Zaprezentowane wyżej wyniki na pewno (☺☺☺)
znacznie go przekraczają …

Zadanie 849 okazuje się być popularne.
Wystąpiło w finale olimpiady matematycznej w Korei, w roku 2007.

Nawet w nieco mocniejszej wersji :

3. Find all triples (x, y, z) of positive integers satisfying $1 + 4^x + 4^y = z^2$.

Nie znalazłem rozwiązania w formie tekstu, ale na YouTube
jest dostępny film z tym rozwiązaniem !
Film jest pod adresem : https://youtu.be/4I0YzkQLTqM

Niniejszy tekst, aż do tego miejsca napisałem jeszcze w roku 2022.
Kilka dni temu / styczeń 2023 / natknąłem się na kolejną,
dostępną pod adresem https://arxiv.org/pdf/math/0608796.pdf pracę :

arXiv:math/0608796 [pdf, ps, other] math.NT

Elementary treatment of $p^a \pm p^b + 1 = x^2$

Authors: Reese Scott

Abstract: We give a shorter simpler proof of a result of Szalay on the equation $2^a + 2^b + 1 = x^2$. We give an elementary

Jak widać na zdjęciu jest tam zaprezentowany dowód krótszy i prostszy
niż ten podany w pracy [S]. Nowy dowód zajmuje tylko jedną stronę,
jest wyraźnie prostszy i ,, prawie ‘’ elementarny
(to znaczy na poziomie olimpiad lub Klubu 44 M).
Jednak ,, prawie ‘’ czyni różnicę, na końcu jest zastosowana nierówność,
która wykracza ponad ten poziom.

Janusz Olszewski

Zadanie nr 856 (*Delta* nr 2 (585) 2023)
Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg nieskończony $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ o wyrazach całkowitych dodatnich taki, że każda dodatnia liczba całkowita występuje dokładnie raz w każdym z ciągów $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ oraz $(d_1, d_2, d_3, \dots)$, gdzie $d_i = |a_i - a_{i+1}|$.

Zadanie 856 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązanie

Istnieją takie ciągi.
Powiemy, że ciąg liczb całkowitych dodatnich $X_k = (x_1, \dots, x_n)$ jest *k-wypełniony* jeżeli liczby w ciągu X_k są parami różne oraz zbiór $\{1, 2, \dots, k\}$ jest zawarty w zbiorze $\{x_1, \dots, x_n\}$.
Skonstruujemy ciąg $(a_1, a_2, \dots)$ taki, że dla każdej liczby naturalnej k istnieje liczba naturalna n taka, że ciąg $A_k = (a_1, \dots, a_n)$ oraz ciąg różnic $D_k = (d_1, \dots, d_{n-1})$ są k-wypełnione.
Konstrukcję ciągu $(a_1, a_2, \dots)$ przeprowadzimy indukcyjnie.
Przyjmijmy $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $d_1 = 1$ oraz $A_1 = (a_1, a_2)$, $D_1 = (d_1)$. Ciągi A_1 i D_1 są 1-wypełnione. Załóżmy, że zostały zdefiniowane $(k-1)$-wypełnione ciągi $A_{k-1} = (a_1, \dots, a_n)$ i $D_{k-1} = (d_1, \dots, d_{n-1})$. Rozszerzymy te ciągi o nowe wyrazy tak, by nowe ciągi A_k i D_k były k-wypełnione. Oznaczmy przez N największy wyraz ciągu A_{k-1}. Oczywiście każdy wyraz ciągu D_{k-1} jest mniejszy niż N.
Jeśli $k \in A_{k-1}$ i $k \in D_{k-1}$, to przyjmijmy $A_k = A_{k-1}$, $D_k = D_{k-1}$.

(1) Jeśli $k \in A_{k-1}$ i $k \notin D_{k-1}$, to przyjmijmy

$$a_{n+1} = 2N + a_n + k, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - k.$$

Wówczas $d_n = 2N + k$, $d_{n+1} = k$.

(2) Jeśli $k \notin A_{k-1}$ i $k \in D_{k-1}$, to przyjmijmy

$$a_{n+1} = 2N + a_n + k, \quad a_{n+2} = k.$$

Wówczas $d_n = 2N + k$, $d_{n+1} = 2N + a_n$.

(3) Jeśli $k \notin A_{k-1}$ i $k \notin D_{k-1}$, to przyjmijmy

$$a_{n+1} = 2N + a_n + k, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + k, \quad a_{n+3} = k.$$

Wówczas $d_n = 2N + k$, $d_{n+1} = k$, $d_{n+2} = 2N + a_n + k$.

Ciągi A_k i D_k powstają odpowiednio z A_{k-1} i D_{k-1} przez dodanie nowych wyrazów a_i i d_i utworzonych w sposób opisany w przypadkach $(1) - (3)$.

Początkowe wyrazy konstrukcji.

A_2	$=$	(1, 2, 8, 6)	przypadek (1)
D_2	$=$	(1, 6, 2)	
A_3	$=$	(1, 2, 8, 6, 25, 28, 3)	przypadek (3)
D_3	$=$	(1, 6, 2, 19, 3, 25)	
A_4	$=$	(1, 2, 8, 6, 25, 28, 3, 63, 67, 4)	przypadek (3)
D_4	$=$	(1, 6, 2, 19, 3, 25, 60, 4, 63)	
A_5	$=$	(1, 2, 8, 6, 25, 28, 3, 63, 67, 4, 143, 148, 5)	przypadek (3)
D_5	$=$	(1, 6, 2, 19, 3, 25, 60, 4, 63, 139, 5, 143)	

Z konstrukcji ciągów A_k i D_k wynika, że każdy z nich zawiera wszystkie liczby naturalne od 1 do k. Udowodnimy, że wyrazy tych ciągów są parami różne.

Z założenia indukcyjnego wiemy, że każdy z ciągów $A_{k-1} = (a_1, \ldots, a_n)$ i $D_{k-1} = (d_1, \ldots, d_{n-1})$ zawiera parami różne wyrazy. Przyjrzyjmy się nowym wyrazom dołączanych do tych ciągów. Łatwo sprawdzamy, że w każdym z przypadków (1) – (3) konstrukcji, nowo dołączane wyrazy są parami różne oraz nie występują w ciągach A_{k-1} i D_{k-1}. Wyrazy te są albo większe od N, czyli są większe każdego z wyrazów tych ciągów, albo wynoszą k. Dokładniej, liczby a_{n+1} i d_n są większe od N, a ponadto:

- w przypadku (1) liczba a_{n+2} jest większa od N, zaś $d_{n+1} = k$.
- w przypadku (2) liczba $a_{n+2} = k$, zaś liczba d_{n+1} jest większa od N.
- w przypadku (3) liczby a_{n+2}, d_{n+2} są większe od N oraz $d_{n+1} = a_{n+3} = k$.

Wobec powyższego ciągi A_k i D_k są k-wypełnione.

Skonstruowany w powyższy sposób ciąg $(a_1, a_2, \ldots)$ spełnia warunki zadania, ponieważ:

* każdy z ciągów $(a_1, a_2, \ldots)$ oraz $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$ zawiera parami różne wyrazy, gdyż każdy z podciągów $A_k = (a_1, \ldots, a_n)$ oraz $D_k = (d_1, \ldots, b_n)$ zawiera parami różne wyrazy.
* dla dowolnej liczby naturalnej k ciągi $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ oraz $(d_1, d_2, \ldots)$ zawierają liczbę k, gdyż podciągi $A_k = (a_1, \ldots, a_n)$ oraz $D_k(d_1, \ldots, b_n)$ zawierają liczbę k.

Uwaga 1. Liczba $2N$ w definicji ciągu A_k została tak dobrana, aby dołączane nowe wyrazy ciągów A_k i D_k były większe od N poza jedną, równą k; k jest równe najmniejszej liczbie całkowitej dodatniej nie występującej w tych ciągach. Oczywiście zamiast $2N$ można przyjąć dowolną dostatecznie dużą liczbę. Chodzi tylko oto, aby zagwarantować, by nowe liczby były różne i większe niż N, a więc nie występują we wcześniej utworzonym ciągu A_{k-1}. Tak więc ciągów spełniających warunki zadania można skonstruować nieskończenie wiele.

Uwaga 2.
Ciągiem różnicowym rzędu n ciągu $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ nazwijmy ciąg $(d_{n,1}, d_{n,2}, \dots)$ taki, że $d_{n,i} = |d_{n-1,i} - d_{n-1,i+1}|$, przy czym $d_{0,i} = a_i$.

Podobną konstrukcję (liniowej rekurencji) do przedstawionej w rozwiązaniu zadania można zastosować do budowy *ciągu będącego permutacją liczb naturalnych takiego, że ciągi różnicowe rzędu* 1 *i rzędu* 2 *są także permutacjami liczb naturalnych.*

Oto przykładowa konstrukcja:
Przyjmijmy $A_1 = (1, 2, 4)$, $D_{1,1} = (1, 2)$, $D_{2,1} = (1)$. Ciągi A_1, $D_{1,1}$ i $D_{2,1}$ są 1-wypełnione. Załóżmy, że zostały zdefiniowane $(k-1)$-wypełnione ciągi $A_{k-1} = (a_1, \dots, a_n)$ i $D_{1,k-1} = (d_{1,1}, \dots, d_{1,n-1})$, $D_{2,k-1} = (d_{2,1}, \dots, d_{2,n-2})$. Oznaczmy przez N największy wyraz ciągu A_{k-1}. Oczywiście każdy wyraz ciągów $D_{1,k-1}, D_{2,k-1}$ jest mniejszy niż N. Oznaczmy $X = 6N + a_n + d_{1,n-1}$.

Rozważmy trzy przypadki:

(1) Jeśli $k \notin D_{2,k-1}$, to przyjmijmy

$$a_{n+1} = X, \quad a_{n+2} = X - 2N, \quad a_{n+3} = X - 4N + k,$$

Wówczas $d_{1,n} = X - a_n$, $d_{1,n+1} = 2N$, $d_{1,n+2} = 2N - k$ oraz $d_{2,n-1} = 6N$, $d_{2,n} = X - a_n - 2N$, $d_{2,n+1} = k$.

(2) Jeśli $k \notin D_{1,k-1}$, to przyjmijmy

$$a_{n+1} = X, \quad a_{n+2} = X - 2N, \quad a_{n+3} = X - 2N - k,$$

Wówczas $d_{1,n} = X - a_n$, $d_{1,n+1} = 2N$, $d_{1,n+2} = k$ oraz $d_{2,n-1} = 6N$, $d_{2,n} = X - a_n - 2N$, $d_{2,n+1} = 2N - k$.

(3) Jeśli $k \notin A_{k-1}$, to przyjmijmy

$$a_{n+1} = X, \quad a_{n+2} = X - 2N, \quad a_{n+3} = k,$$

Wówczas $d_{1,n} = X - a_n$, $d_{1,n+1} = 2N$, $d_{1,n+2} = X - 2N - k$ oraz $d_{2,n-1} = 6N$, $d_{2,n} = X - a_n - 2N$, $d_{2,n+1} = X - 4N - k$.

Konstrukcję ciągów A_k, $D_{1,k}$, $D_{2,k}$ przeprowadzamy następująco.

Jeśli nie zachodzi żaden z powyższych trzech przypadków, to przyjmijmy $A_k = A_{k-1}$. Czyli $D_{1,k} = D_{1,k-1}, D_{2,k} = D_{2,k-1}$.

Jeżeli zachodzi dokładnie jeden z powyższych trzech przypadków, to ciągi A_k, $D_{1,k}$ i $D_{2,k}$ otrzymujemy przez dodanie 3 nowych wyrazów w każdym z tych ciągów.

Jeżeli zachodzą dwa z powyższych przypadków, to najpierw wybieramy jeden z tych przypadków, dla niego wyznaczamy $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$ i dodajemy te trzy nowe wyrazy, a następnie do nowo utworzonych ciągów (z dodanymi wyrazami) stosujemy drugi z tych przypadków (zmieniając wartość N oraz X, przyjmując N jako maksimum z ciągu $A_{k-1} \cup (a_{n+1, a_n+2, a_n+3})$) i dodajemy kolejne 3 wyrazy. Ciągi A_k, $D_{1,k}$ i $D_{2,k}$ będą miały 6 wyrazów więcej niż $A_{k-1}, D_{1,k-1}, D_{2,k-1}$.

Podobnie postępujemy w przypadku, gdy zachodzą wszystkie trzy przypadki. Ciągi A_k, $D_{1,k}$ i $D_{2,k}$ będą miały po 9 wyrazów więcej niż $A_{k-1}, D_{1,k-1}, D_{2,k-1}$.

Oto początkowe ciągi możliwej konstrukcji. Różne konstrukcje uzyskujemy wykonując w różnej kolejności warianty (1)-(3) oraz zmieniając wartości N.

$$
\begin{array}{lcl}
A_2 & = & (1, 2, 4, 30, 22, 16) \\
d_{1,2} & = & (1, 2, 26, 8, 6) \\
d_{2,2} & = & (1, 24, 18, 2) \\
A_3 & = & (1, 2, 4, 30, 22, 16, 202, 142, 85, 1234, 830, 827, 7426, 4958, 3) \\
d_{1,3} & = & (1, 2, 26, 8, 6, 186, 60, 57, 1149, 404, 3, 6599, 2468, 4955) \\
d_{2,3} & = & (1, 24, 18, 2, 180, 126, 3, 1092, 745, 401, 6596, 4131, 2487) \\
A_4 & = & (1, 2, 4, 30, 22, 16, 202, 142, 85, 1234, 830, 827, 7426, 4958, 3, \\
 & & 49514, 34662, 34658, 302042, 203014, 103990) \\
d_{1,4} & = & (1, 2, 26, 8, 6, 186, 60, 57, 1149, 404, 3, 6599, 2468, 4955, \\
 & & 49511, 14852, 4, 267384, 99028, 99024) \\
d_{2,4} & = & (1, 24, 18, 2, 180, 126, 3, 1092, 745, 401, 6596, 4131, 2487, \\
 & & 44556, 34659, 14848, 267380, 168356, 4)
\end{array}
$$

Budując A_2, A_3 oraz A_4 zastosowaliśmy odpowiednio wariant (1), kolejno warianty (1), (2) i (3) oraz kolejno warianty (2) i (1).

Ciągi A_k wyznaczają poszukiwany nieskończony ciąg $(a_1, a_2, \dots)$ będący permutacja liczb naturalnych, którego ciągi różnicowe rzędu 1 i rzędu 2 są także permutacjami liczb naturalnych.

Uwaga 3.
Liniowa rekurencja utworzona w rozwiązaniu zadania i uwadze 2 sugeruje, że dla każdego $n > 2$ można skonstruować ciąg $(a_1, a_2, \dots)$ będący permutacją zbioru liczb naturalnych taki, że jego kolejne ciągi różnicowe rzędów od 1 do n są także permutacjami liczb naturalnych. Przypuszczalnie jest jeszcze ciekawiej: istnieje ciąg będący permutacją zbioru liczb naturalnych taki, że wszystkie jego ciągi różnicowe są permutacjami liczb naturalnych.

Piotr Kumor

856. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg nieskończony $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ o wyrazach całkowitych dodatnich taki, że każda dodatnia liczba całkowita występuje dokładnie jeden raz w każdym z ciągów $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ oraz $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$, gdzie $d_i = |a_i - a_{i+1}|$.

Rozwiązanie

Odpowiedź jest pozytywna, przykładem jest ciąg
$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$: https://oeis.org/A129198
powstaje z niego ciąg $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$: https://oeis.org/A129199

Na tych stronach OEIS jest podany link do pracy **[SV77]** :

P.J. Slater and W.Y.Velez, Permutations of the positive integers with restrictions on the sequence of differences, *Pacific J. Math.*, **71** (1977), 193-196.

To pierwsza chronologicznie praca,
gdzie podano tę konstrukcję i dowód jej poprawności.
Zadanie 856 uznajmy więc za rozwiązane.

Odnotujmy jednak jeszcze kilka pokrewnych, ciekawych wyników, które prezentujemy niżej, wraz ze wskazaniem źródeł ich pochodzenia.

1) Nieskończony ciąg permutacji

Istnieją permutacje $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ dla których ciąg różnic $(d_1, d_2, d_3, \ldots)$ jest permutacją i także ma własność : ciąg kolejnych różnic $|d_i - d_{i+1}|$ jest permutacją, i jest też tak dalej dla wszystkich kolejnych iteracji ciągów. Mówi o tym twierdzenie :

THEOREM. *There exists a permutation of N for which each of its successive difference sequences is also a permutation of N.*

udowodnione w pracy

P.J. Slater, On repeated difference sequences of a permutation of N, *J. Number Theory*, **16** (1983), 1-5.

Nie znam jednak wyraźnych przykładów takich ciągów.
Nie umiem ich sam skonstruować, nie zdołałem też znaleźć ich ani w tej pracy (ją samą znaleźć łatwo), ani na stronie OEIS, ani w ogóle w sieci …
/ co jednak oczywiście nie oznacza, że ich tam na pewno nie ma … /.

**2) Jakie ciągi różnic można otrzymać z permutacji ?
Wariant nieskończony.**

W cytowanej już (na początku) pracy **[SV77]** udowodniono twierdzenie nieco ogólniejsze niż potrzeba do zadania 856.
Mianowicie :

Let $\{a_k\}$ be a sequence of positive integers and $d_k = |a_{k+1} - a_k|$. We say that $\{a_k\}$ is a permutation if every positive integer appears once and only once in the sequence, $\{a_k\}$. We prove the following: Let $\{m_i\}$ be any sequence of positive integers, then there exists a permutation $\{a_k\}$ such that $|\{k | d_k = i\}| = m_i$.

Jest to udowodnione jako Theorem 3 na końcu tekstu.
Konstrukcja jest bardzo podobna do tej z której powstaje ciąg
https://oeis.org/A129198 a więc jest ona na poziomie Klubu 44 M
/ bo przecież zadanie 856 wystąpiło w konkursie ☺ /

Jednak w pracy **[SV77]** nie ma pełnej charakteryzacji ciągów, które mogą powstać jako ciągi różnic pewnych permutacji.
Nie znam podobnej charakteryzacji, być może jest ona nieosiągalna.

Natomiast jest dobrze znana dla klasy ciągów, które mają tylko skończenie wiele parami różnych wyrazów.

3) Ciągi które mają tylko skończenie wiele różnych wyrazów i mogą powstać jako ciągi różnic permutacji

Dokładna ich charakterystyka jest następująca :

In this paper, we show that given any finite set, $D = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$, of positive integers, with gcd $(D_1, D_2, \ldots, D_n) = 1$, there is a permutation of the positive integers such that the absolute value of the difference between any two consecutive values is in D. Further, it is possible to choose the permutation so that each element of D occurs infinitely often as a difference. This answers in the affirmative a conjecture of Slater and Velez (1977, 1979).

Oczywiście jest to także warunek konieczny, bo jeżeli wszystkie liczby zbioru D mają wspólny dzielnik większy od jeden, to ten pierwszy wyjściowy ciąg nie może być permutacją wszystkich liczb całkowitych, jest bowiem podciągiem pewnego ciągu arytmetycznego o różnicy większej niż jeden.
Natomiast dowód dostateczności tego warunku jest trudny i niekonstruktywny (chyba raczej, nie wiem tego na pewno, mimo że mam go przed oczami ☹) a jest on głównym tematem pracy :

Richard Stong, ,, Permutations of the positive integers with specified differences ‘’ Discrete Mathematics 176 (1997) 223 – 231

Praca jest dostępna pod adresem :

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X96001549

W tym miejscu już kończymy nasze rozważania ☺

Michał Adamaszek, Kopenhaga, Klub 44M, II 2023

Zadanie 856.
Istnieje. Przypuśćmy najpierw, że skonstruowaliśmy pewien początkowy fragment $A = (a_1, \ldots, a_n)$, wraz z odpowiadającym mu $D = (d_1, \ldots, d_{n-1})$ tak, że obydwa ciągi nie zawierają powtórzeń.

Niech $\hat{a}$ będzie dowolną liczbą nie występującą w A. Wówczas możemy rozszerzyć ciąg A tak, aby zawierał $\hat{a}$, oraz aby warunek różnowartościowości rozszerzonych A i D pozostał spełniony. W tym celu rozszerzamy A do ciągu

$$(a_1, \ldots, a_n, C, \hat{a})$$

otrzymując jednocześnie rozszerzony ciąg D:

$$(d_1, \ldots, d_{n-1}, |C - a_n|, |C - \hat{a}|).$$

Zatem wymagane różnowartościowości będą spełnione jeżeli tylko dobierzemy dostatecznie wielkie C.

Podobnie, niech $\hat{d}$ będzie dowolną liczbą nie występującą w D. Wówczas możemy rozszerzyć ciąg A tak, aby w ciągu D pojawiło sie $\hat{d}$, oraz aby warunek różnowartościowości rozszerzonych A i D pozostał spełniony. W tym celu rozszerzamy A do ciągu

$$(a_1, \ldots, a_n, C + \hat{d}, C)$$

otrzymując jednocześnie rozszerzony ciąg D:

$$(d_1, \ldots, d_{n-1}, |C + \hat{d} - a_n|, \hat{d}).$$

Zatem wymagane różnowartościowości znów będą spełnione jeżeli tylko dobierzemy dostatecznie wielkie C.

Startując od $A = (1, 2)$ i $D = (1)$ i rozszerzając ciąg A zgodnie z jedną z powyższych procedur o najmniejszy element brakujący w którymś z ciągów A, D skonstruujemy nieskończony ciąg dla którego A i D są różnowartościowe oraz każdy z nich wyczerpuje wszystkie liczby całkowite dodatnie.

Rozwiązanie zadania nr 856

Ciąg budujemy rekurencyjnie wychodząc z 2 elementów: $a_1 = 1, \quad a_2 = 2$.

Załóżmy, że wybraliśmy już elementy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz, że pierwszą liczbą, która nie występuje w ciągu jest liczba k, a pierwszą różnicą, której brak, jest d.

Dopisując jeden lub trzy kolejne elementy ciągu możemy osiągnąć odpowiednio liczby k i d w ten sposób, że żadna różnica kolejnych wyrazów się nie powtórzy, ani żaden wyraz ciągu.

Jeśli $|a_n - k| = d$, to wybieramy $a_{n+1} = k$.

W przeciwnym wypadku bierzemy a_{n+1} dwa razy większe od największego wyrazu ciągu. $a_{n+2} = a_{n+1} + d, \quad a_{n+3} = k$. W tak uzupełnionym ciągu nadal żaden wyraz się nie powtarza ani żadna różnica.

Konstrukcja dowodzi, że żądany ciąg istnieje.

Jerzy Cisło

Janusz Fiett

Rozwiązanie zadania 856

Istnieją takie ciągi. Przykładowa konstrukcja może wyglądać następująco.

Niech A_k oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich różnych od $a_1,\ldots, a_k$, natomiast D_k - zbiór wszystkich liczb całkowitych dodatnich różnych od $d_1, \ldots, d_k$. Przyjmuję, że $a_1=1$, $a_2=2$.

Znając k pierwszych wyrazów ciągu a_n, kolejne wyznaczam następująco:

jeśli $\max(d_1,\ldots, d_{k-1}) > k-1$, to $a_{k+1} = a_k+\min D_k$,

jeśli $\max(d_1,\ldots, d_{k-1}) = k-1$, to:

> jeśli $|a_k-\min A_k| > k-1$, to $a_{k+1} = \min A_k$, $a_{k+2} = a_k+1$
>
> jeśli $|a_k-\min A_k| \leq k-1$, to $a_{k+1} = a_k + k$.

Początkowe wyrazy ciągu a_n to: 1, 2, 4, 7, 3, 8, 14, 5, 15, 22, 30, 6, 31, 42, 54, 67, 81,…

Początkowe wyrazy ciągu d_n to: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 7, 8, 24, 25, 11, 12, 13, 14,…

Powyższą konstrukcję można intuicyjnie opisać w następujący sposób. Zazwyczaj kolejny wyraz ciągu a_n otrzymujemy, dodając do poprzedniego wyrazu najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, która nie wystąpiła jeszcze w (równocześnie konstruowanym) ciągu d_n. Jeśli jednak nadarza się okazja, wyznaczając dwa następne wyraz ciągu a_n wykonujemy przedtem „skok do tyłu”, do najmniejszej liczby całkowitej dodatniej, która nie wystąpiła jeszcze w ciągu a_n, a następnie „skok do przodu”, do liczby o jeden większej, niż obecny przedostatni wyraz ciągu a_n (który jest największym dotychczasowym wyrazem tego ciągu). Okazja, o której mowa, to sytuacja, gdy skok do tyłu następuje na odległość, która nie wystąpiła jeszcze w ciągu d_n.

Opisany algorytm dba, by w ciągu d_n na bieżąco umieszczać jeszcze niewykorzystane liczby, mniejsze od aktualnego indeksu. Dzieje się to kosztem zaniedbywania małych liczb, które nie wystąpiły jeszcze w ciągu a_n - powraca się po nie sporadycznie, tylko wtedy, gdy w zbiorze d_n nastąpi porządek, a więc pojawi się w nim komplet liczb całkowitych dodatnich, mniejszych lub równych aktualnemu indeksowi.

Pozostała część rozwiązania została pominięta w tym
załączniku - przyp. red.

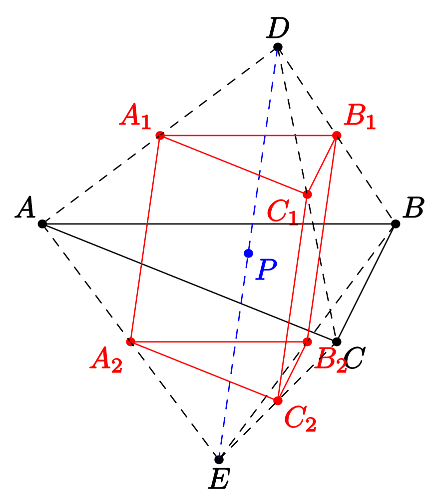
Janusz Olszewski

Zadanie nr 858 (*Delta* nr 2 (585) 2023)
W przestrzeni znajduje się trójkąt równoboczny ABC o boku długości 1 oraz odcinek DE długości 1, mający punkt wspólny z trójkątem ABC. Udowodnić, że pewien z punktów A, B, C, D, E jest w odległości nie większej niż 1 od czterech pozostałych.

Zadanie 858 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązanie

Teza zadania mówi, że albo odległość jednego z punktów D, E do wierzchołków trójkąta ABC nie przekracza 1, albo odległości jednego z wierzchołków trójkąta ABC do pary punktów D, E nie przekracza 1.
Zadanie możemy przeformułować następująco: *W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym o podstawach $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ i wszystkich krawędziach równych* 1 *dla dowolnego punktu P tego graniastosłupa albo odległości do wierzchołków pewnej podstawy $A_iB_iC_i$ nie przekracza* 1, *albo odległości punktu P do końców pewnej krawędzi bocznej nie przekracza* 1.
Pokażemy że to jest to samo zadanie[1]:
Wystarczy zauważyć, że środki A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 odpowiednio odcinków DA, DB, DC, EA, EB, EC tworzą graniastosłup prawidłowy trójkątny o wszystkich krawędziach równych $1/2$. Jeśli punkt P jest środkiem odcinka DE, to $DA = 2PA_2$, $DB = 2PB_2$, $DC = 2PC_2$, $EA = 2PA_1$, $EB = 2PB_1$, $EC = 2PC_1$. Dopuszczamy także przypadek zdegenerowany, gdy podstawy graniastosłupa leża w jednej płaszczyźnie.
Punkt P leży oczywiście w tym graniastosłupie (we wnętrzu lub na jego brzegu). Odpowiednia jednokładność o środku w punkcie P i skali 2 daje sformułowanie dla graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi długości 1.



[1] można to uzasadnić również tak: rozważmy symetrię środkową względem środków P_1 i P_2 odcinków DS i SE, gdzie P jest punktem wspólnym odcinka DE i trójkąta ABC. W symetrii względem P_1 trójkąt równoboczny ABC przejdzie na trójkąt równoboczny $A_1B_1C_1$, a odcinki DA, DB, DC przejdą na odcinki PA_1, PB_1, PC_1. Podobnie w symetrii środkowej względem P_2 trójkąt równoboczny ABC przejdzie na trójkąt równoboczny $A_2B_2C_2$, a odcinki EA, EB, EC przejdą na odcinki EA_1, EB_1, EC_1. Oczywiście $A_1A_2 = DS + SE = 1$ i podobnie $B_1B_2 = C_1C_2 = 1$. $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ jest graniastosłupem prawidłowym trójkątny o wszystkich krawędziach równych 1.

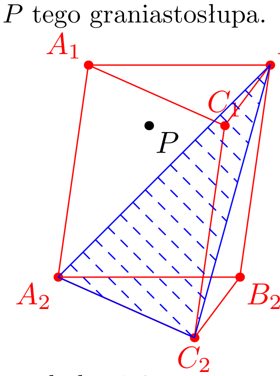
Udowodnimy dwa lematy.

Lemat 1. *Rozważmy zbiór Ω złożony z trzech kul K_A, K_B, K_C o środkach w punktach A, B, C i jednakowym promieniu długości 1, mających część wspólną oraz wielościan W, którego wszystkie ściany zawarte są w zbiorze Ω. Wówczas cały wielościan W jest zawarty w zbiorze Ω.*

Dowód. Załóżmy, że pewien punkt wewnętrzny wielościanu W nie jest zawarty w zbiorze Ω. Niech k będzie prostą przechodzącą przez punkt P prostopadłą do płaszczyzny π, wyznaczonej przez punkty A, B, C. Punkt przecięcia prostej k z płaszczyzną π oznaczmy przez M. Półprostą o początku w punkcie P zawartą w prostej k nie zawierającą punktu M oznaczmy przez l. Weźmy dowolny punkt R półprostej l. Wówczas $RA^2 = RM^2 + MA^2 \geqslant PM^2 + MA^2 = PM^2$ tj. $RA \geqslant PA > 1$. Podobnie $RB \geqslant PB > 1, RC \geqslant PC > 1$. Tak więc odległości każdego punktu półprostej l od wierzchołków A, B, C są większe niż 1. Ponieważ punkt P leży wewnątrz wielościany W, więc półprosta l przecina pewną ścianę tego wielościanu. Punkt ten jest odległy od każdego z punktów A, B, C o więcej niż 1. Mamy sprzeczność z założeniem, że każdy punkt ściany wielościanu jest zawarty w zbiorze Ω. ■

Lemat 2. *W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym o krawędziach długości* 1 *wybierzmy trójkąt, którego jeden bok jest krawędzią podstawy, a pozostałe dwa boki są przekątnymi ścian. Wówczas dla dowolnego punktu P graniastosłupa co najmniej jedna z trzech odległości tego punktu do wierzchołków trójkąta nie przekracza 1.*

Dowód. Weźmy trójkąt $B_1A_2C_2$ w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym o podstawach $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ oraz dowolny punkt P tego graniastosłupa.

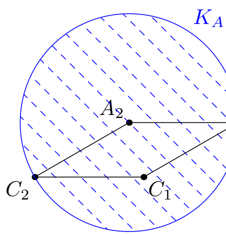


Aby udowodnić, że co najmniej jedna z trzech odległości PB_1, PA_2, PC_2 nie przekracza 1 wystarczy udowodnić, że punkt P leży w jednej z kul o środkach w punktach B_1, A_2, C_2 i promieniu 1. Kule te oznaczmy przez K_B, K_A, K_C, a sumę mnogościową tych kul oznaczmy przez Ω.

Zgodnie z lematem 1 wystarczy pokazać, że każda ze ścian tego graniastosłupa leży w zbiorze Ω.

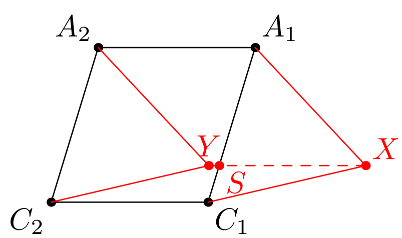
Podstawa $A_2C_2B_2$ będąca trójkątem równobocznym o boku 1 jest zawarta w każdej z kul K_A i K_C. Podstawa $A_1C_1B_1$ będąca trójkątem równobocznym o boku 1 jest zawarta w w kuli K_B. Ściana $A_1B_1B_2A_2$ jest rombem o boku 1, dlatego trójkąty równoramienne $A_1A_2B_2$ i $A_1B_1B_2$ o ramionach długości 1 są zawarte odpowiednio w kulach K_A i K_B. Dlatego ściana $A_1B_1B_2A_2$ jest zawarta w zbiorze Ω. Podobnie ściana $B_1B_2C_2C_1$ jest zawarta w zbiorze Ω.

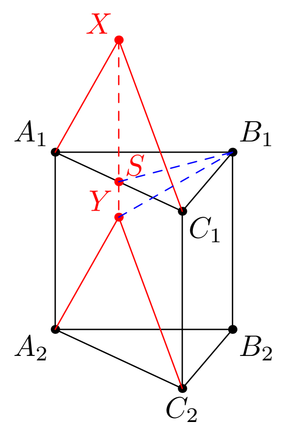
Przyjrzyjmy się dokładniej ścianie $A_1A_2C_2C_1$. Ściana ta jest rombem o boku 1.



Jeśli jeden z kątów przy wierzchołkach A_2 lub C_2 jest nie większy niż $60°$, to romb $A_1A_2C_2C_1$ jest zawarty w jednej z kul K_A, K_C. Rzeczywiście, jeśli $\sphericalangle A_2C_2C_1 \leqslant 60°$, to odcinek A_2C_1 jest nie większy niż 1. A więc romb $A_1A_2C_2C_1$ jest zawarty w kuli K_A.

Załóżmy, że $60° < \sphericalangle A_2C_2C_1$. Niech X i Y będą wierzchołkami trójkątów równobocznych A_1C_1X i A_2C_2Y leżących w płaszczyźnie rombu $A_1A_2C_2C_1$ i takich, że punkt Y należy do tego rombu, zaś punkt X leży poza rombem. Gdy $B_1 = X$, to dostajemy przypadek graniastosłupa zdegenerowanego,tj. gdy podstawy leżą w jednej płaszczyźnie.





Czworokąt A_2A_1XY jest rombem. Dlatego $XY = 1$. Niech S będzie punktem przecięcia odcinków C_1A_1 i XY. Wówczas

$$B_1Y \leqslant B_1S + SY = XS + SY = XY = 1.$$

Zauważmy teraz, że trójkąt C_2C_1Y jest zawarty w kuli K_C, trójkąt A_2A_1Y jest zawarty w kuli K_A, a trójkąt A_2C_2Y jest zawarty w każdej z kul K_A, K_C.
W końcu, ponieważ odległości punktów A_1, Y, C_1 od środka kuli K_A (tj. punktu B_1) nie przekraczają 1, więc trójkąt A_1YC_1 jest zawarty w kuli K_B.
Tak więc, również romb $A_1A_2C_2C_1$ jest zawarty w zbiorze Ω.
Zatem wszystkie ściany graniastosłupa $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ są zawarte w zbiorze Ω.
Tym samym, zgodnie z lematem 1, nasz graniastosłup jest zawarty w zbiorze Ω. ■

Przejdźmy do rozwiązania zadania - w zmodyfikowanej wersji. Teza wynika szybko z lematu 2. Weźmy dowolny punkt graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędziach długości 1. Rozważmy trzy przypadki.

(1) Jeżeli wszystkie odległości punktu P do wierzchołków pewnej podstawy graniastosłupa są większe od 1, to na mocy lematu, odległości punktu P do wierzchołków przeciwległych do krawędzi tej podstawy nie przekracza 1. Czyli wszystkie odległości punktu P do wierzchołków drugiej podstawy nie przekracza 1.

(2) Jeżeli dwie odległości punktu P do wierzchołków X, Y pewnej podstawy XYZ graniastosłupa są większe niż 1, zaś odległość punktu P do trzeciego wierzchołka Z tej podstawy nie przekracza 1, to na mocy lematu 2, odległość odległości punktu P do wierzchołka Z' przeciwległego do krawędzi XY nie przekracza 1. Odcinek ZZ' jest krawędzią boczną tego graniastosłupa.

(3) Jeżeli dwie odległości punktu P do wierzchołków dowolnej podstawy nie przekracza 1, to odległości do końców pewnej krawędzi bocznej nie przekracza 1.

Janusz Olszewski

Zadanie nr 863 (*Delta* nr 6 (589) 2023)
Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze $p > 2$ takie, że każda z liczb $p+4k^2$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, p-1$, także jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie

Rozważmy nieco ogólniejszy problem:
wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $m > 1$ *takie, że każda z liczb* $m+4k^2$, *gdzie* $k = 1, 2, \ldots, m-1$, *jest liczbą pierwszą.*

Łatwo sprawdzamy, że gdy $m \leqslant 7$, wówczas tylko liczby $m = 3$ i $m = 7$ spełniają żądane warunki. Udowodnimy, że nie ma liczb naturalnych m większych niż 7 dla których każda z liczb $m+4k^2$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, m-1$, jest liczbą pierwszą.
Gdy m jest parzyste, wówczas liczby $m + 4k^2$ są złożone.
Gdy liczba m jest nieparzysta, wówczas jest postaci $4n + 1$ lub $4n - 1$.

Jeżeli $m = 4n+1$, to przyjmując $k = n < m$ otrzymujemy liczbę $m + 4k^2 = (2n + 1)^2$, będącą kwadratem liczby większej niż 1, a więc otrzymujemy liczbę złożoną.

Jeżeli $m = 4n - 1$ oraz liczba n ma dzielnik właściwy nieparzysty $d > 1$, to przyjmując $2k - 1 = d$ otrzymujemy liczbę $m + 4k^2 = 4n + (2k - 1)(2k + 1)$ podzielną przez d (bo każdy składnik $4n$ i $(2k - 1)(2k + 1)$ dzieli się przez d). Liczba d jest mniejsza niż m, więc liczba $m + 4k^2$ jest złożona.

Jeżeli $m = 4n-1$ oraz liczba n nie ma dzielników właściwych nieparzystych, to $m = 2^q - 1$ dla pewnego $q \geqslant 4$ (bo $m > 7$).

Gdy liczba q jest parzysta tj. $m = 2^{2t} - 1$, wówczas dla $k = 2^t + 1$ liczba $m + 4k^2 = 2^{2t} - 1 + 4(2^t + 1)^2 = (2^t + 1)(5 \cdot 2^t + 3)$ jest złożona.

Jeżeli $q = 4t + 1$, to przyjmując $k = 2^{t-1}$ otrzymujemy liczbę $m + 4k^2 = 2^{4t+1} - 1 + 2^{2t} = (2^{2t} + 1)(2^{2t+1} - 1)$, która jest złożona.

Jeżeli $q = 4t + 3$, to przyjmując $k = 2^{2t-1}$ otrzymujemy liczbę $m + 4k^2 = 2^{4t+3} - 1 + 2^{4t} = (3 \cdot 4^t)^2 - 1 = (3 \cdot 4^t - 1)(3 \cdot 4^t + 1))$, która jest złożona.

Odpowiedź na problem postawiony w zadaniu oraz jego rozszerzoną wersję jest taka sama: tylko liczby 3 *i* 7 *spełniają żądane warunki.*

Zadanie 863. Komentarz.

Wydaje się oczywiste, że warunki zadania mogą spełniać tylko dostatecznie małe liczby pierwsze, a dalej wejdzie efekt statystyczny powodujący, że rozważane p^2 liczb będzie musiało mieć jakieś nietrywialne czynniki pierwsze. Takie podejście wydaje mi się naturalne, próbowałem zaimplementować je w poniższej (niekompletnej) próbie rozwiązania.

Inne rozwiązanie (próba). Liczby pierwsze postaci $p = 4k + 1$ są wykluczone, bo dla nich $p + 4k^2 = 4k + 1 + 4k^2 = (2k + 1)^2$ nie jest liczbą pierwszą. Dla liczb pierwszych $p \equiv 3 \pmod 4$ udowodnimy najpierw lemat.

Lemat. Jeżeli liczba pierwsza $p \equiv 3 \pmod 4$ spełnia warunki zadania to każda nieparzysta liczba pierwsza $3 \le q < p$ jest nieresztą kwadratową modulo p.

Dowód lematu. Przypuśćmy przeciwnie, że pewna nieparzysta liczba pierwsza $3 \le q < p$ jest resztą kwadratową modulo p. Korzystając z faktu, że $\frac{p-1}{2}$ jest nieparzyste i z prawa wzajemności reszt kwadratowych obliczamy

$$\left(\frac{-p}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}} = \left(\frac{-1}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}}\left(\frac{q}{p}\right) = 1.$$

Wobec tego $-p$ jest resztą kwadratową modulo q, czyli istnieje całkowite $1 \le x \le q - 1$ dla którego

$$-p \equiv x^2 \pmod q.$$

Jeżeli x jest nieparzyste, to zastępujemy x przez parzyste $q-x$ i kongruencja nadal zachodzi, łącznie z warunkiem $1 \le x \le q - 1$. Niech więc $x = 2k$, wówczas $1 \le k \le \frac{q-1}{2} < p$ oraz

$$p + 4k^2 = p + x^2 \equiv 0 \pmod q,$$

a więc $p + 4k^2$ dzieli się przez mniejszą od siebie liczbę pierwszą q, czyli, wbrew założeniu, jest liczbą złożoną. Sprzeczność kończy dowód. $\square$

Resztami kwadratowymi w przedziale $[0, p)$ dla $p = 3$ są $0, 1$ zaś dla $p = 7$ są $0, 1, 2, 4$, zatem faktycznie nie ma wśród nich nieparzystej liczby pierwszej. Wystarczyłoby zatem pokazać:

Hipoteza. Dla każdej liczby pierwszej $p \ge 11$ istnieje liczba pierwsza $3 \le q < p$ będąca resztą kwadratową modulo p.

Tutaj zaczynają się schody. Statystycznie/heurystycznie/eksperymentalnie rzecz biorąc dla dostatecznie dużych p nie ma innego wyjścia, ale co innego wykazać to precyzyjnie. Są różne źródła na temat najmniejszej reszty kwadratowej modulo ustalone p będącej liczbą pierwszą, ale zawsze albo trochę brakuje, albo wynik jest asymptotyczny, albo dopuszcza możliwość $q = 2$, albo ja nie znam wystarczająco analitycznej teorii liczb... Także tutaj przypadek $p \equiv 1 \pmod 4$ jest łatwiejszy, ale my potrzebujemy akurat głównie ten przeciwny. W związku z tym tutaj odpuszczam.